

Какие-то задачки для тренировки прямо перед ЕГЭ. Составители подборки - Коваль Максим Олегович и Вотяков Александр Романович

13. $2 \cos^2\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) + \sqrt{3} \sin(2x) = 0$

14. Дана правильная 4-х угольная пирамида $SABCD$. Сторона основания равна 8, боковое ребро равно 9. Точки M и K расположены на AB и SB соответственно так, что $SK = SM = 7$. Есть плоскость α , которая содержит точки K и M . Она перпендикулярно основанию $ABCD$. Надо доказать, что C лежит на этой плоскости, и найти площадь сечения плоскостью фигуры.

15. $x^2 \cdot \log_{625}(3 - x) \leq \log_5(x^2 - 6x + 9)$

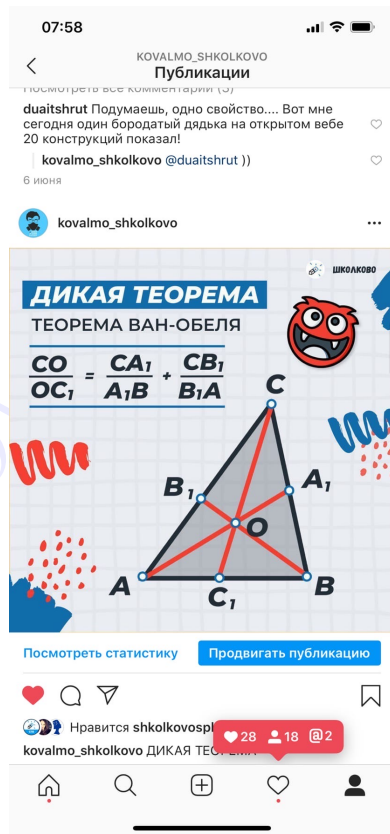
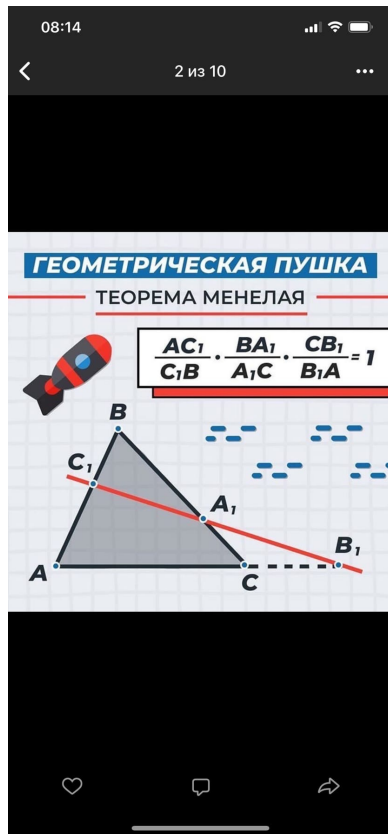
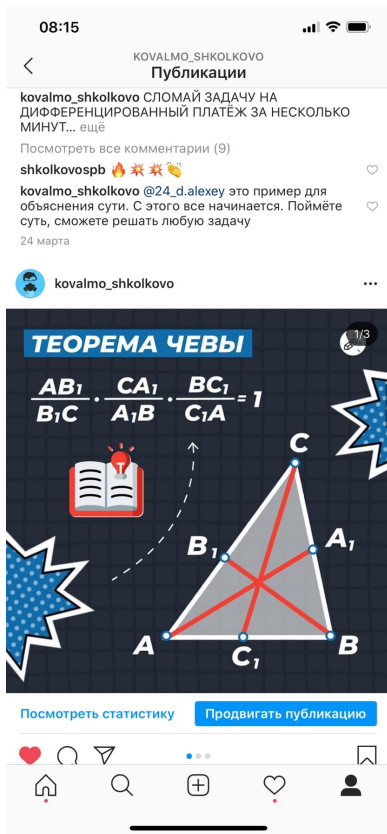
Подсказка: обратите внимание, что $3 - x > 0$, следовательно, аргумент логарифма в правой части удобнее представить не как $(x - 3)^2$, а как $(3 - x)^2$, потому что когда двойку из логарифма снесите как степень, надо бы чтобы оставшееся выражение было положительным. Модуль ставить не хочется, а тут нам такую приятную штуку в левой части подогнали, воспользуемся.

16. Треугольник ABC , $AC_1 : C_1B = 8 : 3$, $BA_1 : A_1C = 1 : 2$, $AB_1 : B_1C = 1 : 3$. Отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке D .

а) Доказать, что ADA_1B_1 - параллелограмм

б) Чему равен радиус описанной окружности, если $AO \perp BC$, $AC = 16$, $BC = 15$

Подсказка: теорема Ван-Обеля и Чева, Менелая



Решение: а) продлеваем AD до пересечения с BC в точке A_2 . Записываем Чевы для A_2, B_1, C_1 , получаем $CA_2 : A_2B = 8 : 1$. Отсюда $BA_2 = t$, $A_1A_2 = 2t$, $CA_1 = 6t$. Тогда по теореме Фалеса $A_1B_1 \parallel AD$.

Записываем теорему Менелая для прямой AA_2 и треугольника B_1BC , получаем $BD : DB_1 = 1 : 2$. Также $BA_1 : CA_1 = 1 : 2$, откуда по Фалесу имеем параллельность $DA_1 \parallel AB_1$, ч.т.д.

17. Кредит, первые три года платят только проценты (долг= S), затем за два года двумя равными платежами полностью гасят. $S=825$ тыс., ставка 20% годовых. Чему равна сумма выплат?

18.1 При каких значениях параметра a система имеет два решения?

$$\begin{cases} \log_4(16 - y^2) = \log_4(16 - a^2x^2) \\ x^2 + y^2 = 10x + 4y \end{cases}$$

Подсказка: в первом уравнении после записи ОДЗ логарифмы можно снимать, а второе уравнение - окружность (перенесли в левую часть всё и вынесли полные квадраты)

18.2 При каких значениях параметра a система имеет два решения?

$$\begin{cases} \log_5(y^2 - 16) = \log_5(16 - a^2y^2) \\ x^2 - y^2 = 6y - 4 \end{cases}$$

Подсказка: 1) При x равном нулю - отдельно рассмотреть, найти a при которых два решения по игреку получится. т.е. решения $(0, y_1)$ и $(0, y_2)$ 2) При других x в силу чётности второго уравнения по x у если подходит (x, y) , то обяз подойдёт $(-x, y)$. Так что во втором уравнении после переноса y^2 в правую часть правая часть должна быть положительная, причём определена однозначно (иначе не два решения будет). Первое уравнение имеет два решения, значит одно из них должно не подойти в ОДЗ, вуаля

19. Даны различные натуральные числа, их разделили на 3 группы. В первой группе всем числам приписали справа 4, во второй - 7, третью не трогали.

а) Могла ли сумма всех чисел увеличиться в 3 раза?

б) Могла ли сумма чисел увеличиться в 17 раз

Подсказка: что означает “приписать к числу цифру 4 справа”? Это означает: умножить число на десять (чтобы приписать к нему нолик) и затем прибавить 4 (чтобы вместо нолика получилось 4). То есть, “приписать 4” это $x \rightarrow 10x + 4$. Подумайте над этим.