**Параметры. Надо ли проверять единственность решения?**

А. В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru

В некоторых задачах требуется найти значение параметра, при котором система имеет единственное решение. При решении таких задач обычно рассуждают так: предположим, что система имеет решение. Воспользуемся её особенностями, чтобы определить, при каком условии на параметр она имеет единственное решение. Но на этом решение задачи не заканчивается. Ещё надо убедиться, что при найденном значении параметра система имеет решение и оно единственное. Рассмотрим подготовительное задание, которое подтвердит сказанное.

**1.** Найдите значения параметра *a* , при каждом из которых система

 (1)

имеет единственное решение.

**Решение.** Неизвестные *x* и *y* входят в систему (1) симметрично, следовательно, если при некотором значении *a* система имеет решение , то она имеет и решение . Причём если , то эти решения различны. Следовательно, чтобы система имела единственное решение, должно выполняться условие . Решив второе уравнение системы (1) при условии *x* = *y*, получим две пары решений: (2; 2) и (–2; –2). Из первого уравнения системы (1) найдём значения параметра, соответствующие этим решениям: = 8 и = 0.

Проверим, действительно ли при каждом найденном значении параметра система (1) имеет единственное решение.

1) Пусть *a* = 8, тогда система (1) имеет вид:

 (2)

Умножив первое уравнение системы (2) на 2 и сложив со вторым уравнением, получим уравнение:

следовательно, система (2) равносильна системе

 (3)

Все решения системы (3) являются или решениями системы

 (4)

или решениями системы

 (5)

Система (4) имеет единственное решение (2; 2), а система (5) не имеет решений. Следовательно, при *a* = 8 система (1) действительно имеет единственное решение.

2) Пусть *a* = 0, тогда система (1) имеет вид:

 (6)

Умножив первое уравнение системы (6) на 2 и сложив со вторым уравнением, получим уравнение:

следовательно, система (6) равносильна системе

 (7)

Все решения системы (7) являются или решениями системы

 (8)

или решениями системы

 (9)

Система (8) имеет единственное решение (–2; –2), а система (9) имеет два решения: (; ) и (; ). Следовательно, при *a* = 0 система (1) имеет три различных решения.

**Ответ.** 8.

**Замечание.** Оказалось, что при условии *x* = *y* система (1) имеет единственное решение при *a* = 8, и два различных решения *a* = 0. Поэтому найденные значения параметра нуждаются в проверке на выполнение условий задачи.

А теперь попробуем решить задачу, предназначенную абитуриентам.

**2.** Найдите все значения α, при которых система

 (1)

имеет единственное решение. **[1]**

**Решение.** Заметим, что если при некотором значении система имеет решение , то она имеет и решение , так как неизвестные *x* и *y* входят симметрично в третье уравнение системы (1) и во второе уравнение, которое можно записать так:

.

Первое уравнение системы (1) также не меняется при замене *x* на *y* и *y* на *x*, так как и ,

Причём если , то решения и различны. Следовательно, чтобы система имела единственное решение, должно выполняться условие .

Итак, пусть *x* = *y*, заменив в системе (1) *y* на *x*, перепишем её в виде:

 (2)

Если *z* ≠ 0, то кроме решения система (2) имеет отличное от него решение , так как и = . Следовательно, чтобы система (2) имела единственное решение, должно выполняться условие *z* = 0. Тогда система (2) имеет вид:

 (3)

Так как левая часть третьего уравнения системы (3) имеет смысл, то должно выполняться условие . Этому условию удовлетворяет единственный корень первого уравнения системы (3): *x* = 0, но тогда Итак, чтобы система (1) имела единственное решение, должно выполняться условие

Проверим, действительно ли при система (1) имеет единственное решение.

Пусть и тройка чисел решение — решение системы (1), которая имеет вид:

 (4)

Система (4) имеет решение (0; 0; 0), докажем, что оно единствен­ное. Из второго уравнения системы (4) следует, что точка принадлежит сфере с центром *A* (1; 1; 0) и радиусом в системе координат *Oxyz*. Радиус *OA* сферы перпендикулярен оси *z*, прямой
*y* = –*x* плоскости *xy*, следовательно, радиус *OA* перпендикулярен плоскости *x* + *y* = 0, делящей пространство на два полупространства, одному из которых принадлежат все точки сферы, кроме точки *O* (0; 0; 0), принадлежащей границе полупространства. Итак, точка принадлежит плоскости *x* + *y* = 0 или лежит в том же полупространстве, что и центр сферы *A*.

С другой стороны, из третьего уравнения системы (4) следует, что = 0, т. е. тройка чисел удовлетворяет неравенству 0, это означает, что точка лежит с центром сферы в разных полупространствах или на границе этих полупространств, то есть принадлежит плоскости *x* + *y* = 0.

Так как точка не может лежать одновременно в разных полупространствах, то она принадлежит плоскости *x* + *y* = 0. Но единственная точка сферы, принадлежащая на этой плоскости (0; 0; 0). Это означает, что при система (4), а значит, и система (1) имеют единственное решение.

Выражаю благодарность нашему внимательному читателю А. В. за консультацию по поводу доказательства единственности решения системы (4) в задании **2**.

**Используемая литература**

**1.** Козко А. И., Панферов В. С., Сергеев И. Н., Чирский В.Г. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С5. Задачи с параметром /Под ред. А. Л. Семенова и И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с.