**Иррациональные уравнения: «метод танка» или…**

*Танки грязи не боятся!*

При решении иррационального уравнения чаще всего приходится возводить его в степень, иногда несколько раз. Этот метод решения сопряжён с громоздкими вычислениями и преобразованиями. Но полученные уравнения более высоких степеней с целыми коэффициентами иногда удаётся решить. Дадим этому методу решения шуточное название «метод танка», рассмотрим первый пример его применения.

**1.** Решите уравнение:

. (1)

**Решение.** *I способ.* Сначала перепишем уравнение (1) в виде

 . (2)

Теперь проявим отсутствие наблюдательности и применим «метод танка», т. е., не боясь долгих вычислений и преобразований (см. эпиграф), а также уравнений высоких степеней, возведём уравнение (2) в квадрат. Получим его следствие

, (3)

имеющее все корни уравнения (2) и, возможно, посторонние корни. Не забудем все корни уравнения (3) проверить подстановкой в уравнение (1).

В уравнении (3) перенесём все слагаемые, не связанные с корнем в правую часть, получим равносильное ему уравнение:

, | : 2

 ,

 . (4)

Уравнение (4) имеет очевидный корень *x*1 = .

Пусть теперь *x* ≠ . Разделив уравнение (4) на не равную нулю функцию , получим уравнение

 , (5)

равносильное уравнению (4) на множестве всех *x*, таких, что *x* ≠ .

Возведём уравнение (5) в квадрат, получим его следствие

,

которое не имеет корней.

Проверка показывает, что число *x*1 = является корнем уравнения (1).

*II способ.* Теперь обратим внимание на то, что подкоренные выражения в уравнении (1) связаны с выражениями 4*x* и 4*x* + 1, встречающимися в записи этого уравнения. Перепишем уравнение (1) в виде:

 . (6)

Рассмотрим функцию *f* (*t*) = = , она определена на множестве ***R***, является нечётной и возрастающей.

Уравнение (6) можно переписать в виде

*f* (*t*1) = –*f* (*t*2), (7)

 где *t*1 = , *t*2 = .

Из нечётности функции *f* (*t*) следует, что –*f* (*t*2) = *f* (–*t*2), т. е. *f* (*t*1) = *f* (–*t*2), а из возрастания функции *f* (*t*) следует, что *t*1 = –*t*2. Другими словами, уравнение (7) равносильно уравнению *t*1 = –*t*2, т. е. уравнение (6) равносильно уравнению

 = –(,

имеющему единственный корень *x*1 = .

Решая уравнение (1) вторым способом, мы не переходили к уравнению-следствию, поэтому проверка полученного корня не требуется.

*III способ.* (Соловьёв С.П., Калуга. Лицей № 48). Обратим внимание на то, разность двух подкоренных выражений равна 8*x* + 1. Выполним следующие преобразования уравнения (1):

,

,

,

,

.

Заметим, что левая часть уравнения (1) определена на множестве всех действительных чисел, последнее уравнение получено из него равносильными преобразованиями, Так как выражение в скобках положительно при любых значениях *x*, то уравнение (1) равносильно уравнению

имеющему единственный корень . Следовательно, и равносильное ему уравнение (1) имеет единственный корень .

**Ответ.** .

«Метод танка» надо применять исключительно аккуратно, освоив же применение замены неизвестного, свойств функций[[1]](#footnote-1), можно получить заметный выигрыш во времени при работе с такими уравнениями. Тем более, что «метод танка» не всесилен. Убедимся в этом на следующем примере.

**2.** Решите уравнение:

 . (8)

**Решение.** *I способ.* Перепишем уравнение (8) в виде

 ,

 .

Возведём это уравнение в квадрат, после преобразований получим:

 1 = 0.

Выполнив замену неизвестного *y* = , понизим степень полученного уравнения:

 1 = 0. (9)

Теорема о корне многочлена с целыми коэффициентами позволила бы найти хотя бы один рациональный корень уравнения (9) при условии, что он существует. А его, как мы увидим позже, нет.

После публикации статьи на сайте [www.shevkin.ru](http://www.shevkin.ru) от внимательного читателя поступило предложение переписать уравнение (9) в виде

 = 0, (9')

но дальнейшие поиски сначала *y*, а потом *x* сопряжены с большими техническими трудностями, поэтому здесь «метод танка» не даёт быстрого результата.

*II способ.* Перепишем уравнение (8) в виде

 . (10)

Правая часть уравнения (10), равносильного уравнению (8), положительная, так как , поэтому для *x* справедливы неравенства: 0 < *x* ≤ 1.

Введя новое неизвестное *t* = , перепишем уравнение (10) в виде:

 . (11)

Уравнение (11) имеет два корня: и .

Множество всех корней уравнения (8) есть объединение множеств корней уравнений

1) =    и   2) =

Условию 0 < *x* ≤ 1 удовлетворяют единственный корень = уравнения 1) и два корня = и = уравнения 2). Упростим запись чисел и :

.

Числа , и являются корнями уравнения (8) и других корней оно не имеет.

*III способ.* Выполним тригонометрическую замену неизвестного в уравнении (8). Пусть *x* = , как было показано выше, 0 < *x* ≤ 1, поэтому можно считать, что 0 < *t* , 0 < 2*t* . Тогда . Перепишем уравнение (8) в виде

 . (12)

Пусть *y* = 2, перепишем уравнение (12) в виде

 . (13)

Уравнение (13) имеет два корня = 1 и = .

Множество всех корней уравнения (12) есть объединение множеств корней уравнений

1) = 1   и   2) = .

Условию 0 < 2*t* удовлетворяют единственный корень уравнения 1) и два корня и уравнения 2).

Тогда = , =
= , = .

Итак, уравнение (8) имеет три корня: , и .

**Ответ.** , , .

Выражаю благодарность учителям математики М.Г. Назарову и С.П. Соловьёву за помощь в подготовке материала к публикации.

А.В. Шевкин,

avshevkin@mail.ru

11.06.2017

С дополнением решения Соловьёва С.П. от 10.02.2018.

1. Подробнее см. п.п. 13.1-13.5 из учебника «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс» (С. М. Никольский и др.). [↑](#footnote-ref-1)