**Новогоднее уравнение и рассуждения с числовыми значениями**

А.В. Шевкин,  
 [avshevkin@mail.ru](mailto:avshevkin@mail.ru)

Рассмотрим решение уравнения, в котором есть и тригонометрия, и модули, и арифметические корни, и новогодние мотивы.

**1.** Решите уравнение

(1)

**Решение.** Если существует корень , то верно числовое равенство:

(2)

Так как все числовые выражения в равенстве (2) определены, то любое число удовлетворяет системе:

т. е. удовлетворяют двойному неравенству:

. (3)

Правая часть равенства (2) неотрицательна, следовательно, и левая часть равенства (2) неотрицательна, что возможно лишь при условии:

,

откуда следует, что все числа находятся из равенства:

= *n*, где *n* **Z**,

т. е. по формуле:

, где *n* **Z**.

Подставив вместо в двойное неравенство (3), получим двойное неравенство:

которое выполняется лишь для целого *n* = 0. Это означает, что если уравнение (1) имеет корень , то этот корень равен 1. Проверкой убеждаемся, что действительно является корнем уравнения (1).

**Ответ.** 1.

А теперь решим задания без новогодней тематики.

**2.** Решите уравнение

(4)

**Решение.** Если существует корень , то верно числовое равенство:

(5)

Так как правая часть равенства (5) неотрицательна, то его левая часть тоже неотрицательна, что возможно лишь при = 5. При этом левая часть равенства (5) равна 0. Остаётся проверить, равна ли нулю при = 5 правая часть равенства (5). Так как при = 5

= 0,

то = 5 — единственный корень уравнения (4).

**Ответ.** 5.

**3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(6)

имеет единственный корень.

**Решение.** Если существует корень , то верно числовое равенство:

(7)

Рассуждая как в решении задания **3**, получим, что левая часть равенства (7) неотрицательна лишь при = 5. При этом левая часть равенства (7) равна 0. Так как

= = 1,

то равенство (7) верно лишь при *a* = 3. То есть уравнение (6) имеет единственный корень при *a* = 3.

**Ответ.** При *a* = 3.

**4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(8)

имеет единственный корень.

**Решение.** Если существует корень , то верно числовое равенство:

(9)

Рассуждая как в решении задания **3**, получим, что левая часть равенства (9) неотрицательна лишь при = 5. При этом левая часть равенства (9) равна 0. Так как при = 5

= = 1,

то равенство (9) верно лишь при условии = = , где   
 **Z**. Откуда получим, что *a* = 24 – 4, где **Z**. То есть уравнение (8) имеет единственный корень при *a* = 24 – 4, где **Z**.

**Ответ.** При *a* = 24 – 4, где **Z**.