**На доске написали натуральные числа…**

**1.** На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 396. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 25 заменили на число 52).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел. [\*][[1]](#footnote-1)

**Решение.** а) Если взять числа 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15, сумма которых равна 99, то после перестановки цифр сумма получившихся чисел 297 в 3 раза больше, чем 99. Возьмём четыре такие группы чисел, их сумма 396, а сумма чисел, полученных после перестановки цифр, в 3 раза больше.

Здесь использованы двузначные числа, у которых увеличение числа при перестановке его цифр близко к трём: у числа 14 — в 2$\frac{13}{14}$ раза, у числа 15 — в 3,4 раза. Далее составляли из них группу двузначных чисел, у которой при перестановке цифр сумма чисел увеличится ровно в 3 раза.

б) Если взять числа 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, сумма которых 99, то после перестановки цифр сумма получившихся чисел 198 будет в 2 раза больше, чем 99. Сумма чисел в четырех таких группах равна 396, а после перестановки цифр — в 2 раза больше. Ответ на вопрос: да.

в) Наибольшее увеличение двузначного числа при перестановке его цифр у числа 19 — в $4\frac{15}{19}$ раза. Так как 396 = 20 ∙ 19 + 16, то возьмём 20 чисел 19 и 1 число 16. После переста­новки цифр получим числа, сумма которых равна 20 ∙ 91 + 1 ∙ 61 = 1881. Увеличить сумму получившихся чисел с тем же их количеством нельзя. Например, замена суммы 19 + 16 на равную ей сумму 18 + 17 не меняет суммы чисел после перестановки цифр, так как 91 + 61 = 81 + 71.

Если же мы будем увеличивать количество чисел в группе, то в ней уменьшится количество чисел 19, а новая полученная сумма цифр окажется меньше, чем 1881. Это означает, что сумма 1881 — наибольшая.

**Ответ.** а) 24 числа 14 и 4 числа 15; б) да; в) 1881.

**2.** На доске было написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел. [1-42][[2]](#footnote-2)

**Решение.** а) В группе чисел 12, 13, 18, 18, 19, 19 после перестановки цифр сумма увеличивается в 4 раза — с 99 до 396. В группе чисел 15, 16, 17, 18 после перестановки цифр сумма тоже увеличивается в 4 раза — с 66 до 264. Возьмём три первых группы чисел и одну вторую. Первоначальная сумма чисел составит 99 ∙ 3 + 66 = 363, а после перестановки цифр — она станет в 4 раза больше.

б) Пусть существует группа двузначных натуральных чисел, в которой после перестановки цифр сумма чисел группы удваивается. Пусть сумма цифр десятков всех чисел группы равна *a*, а сумма цифр единиц всех чисел группы равна *b*. Тогда 10*a* + *b* = 363, а 10*b* + *a* = 726. Вычтем из второй суммы чисел первую, получим равенство: 9*b* ­– 9*a* = 363. Левая часть равенства делится на 9, а правая — нет, что невозможно. Ответ на вопрос: нет.

в) Наибольшее увеличение двузначного числа при перестановке его цифр у числа 19 — в $4\frac{15}{19}$ раза, затем у числа 18 — в 4,5 раза. Возьмём 3 числа 19 и 17 чисел 18. После перестановки цифр получим числа, сумма которых равна 3 ∙ 91 + 17 ∙ 81 = 1650. Увеличить сумму получившихся чисел с тем же их количеством нельзя. Например, замена суммы 19 + 16 на равную ей сумму 18 + 17 (и наоборот) не меняет суммы чисел после перестановки цифр, так как 91 + 61 = 81 + 71.

Если же мы будем увеличивать количество чисел в группе, то в ней уменьшится количество чисел 19 и 18, а новая полученная сумма чисел окажется меньше, чем 1650. Это означает, что сумма 1650 — наибольшая.

**Ответ.** а) Три раза 12, 13, 18, 18, 19, 19 и 15, 16, 17, 18; б) нет; в) 1650.

Сюжет задачи меняется, но опять пишем натуральные числа на доске.

**3.** На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске. [2-29]

**Решение.** а) Если первоначально на доске записали 3, 1 и восемнадцать чисел 2, то их сумма равна 40, а среднее арифметическое равно 2. Уменьшим одну единицу на 1 и сотрём полученный 0 — получится 19 чисел, их сумма равна 39, а среднее арифметическое равно $\frac{39}{19}$ > 2. Ответ на вопрос: да.

б) Пусть написали 20 чисел, среднее арифметическое которых равно 27. Среди них должны быть единицы — иначе не удастся повысить среднее арифметическое группы чисел после стирания нулей. Пусть на 1 уменьшили *x* единиц. После описанной процедуры количество чисел в группе и их сумма уменьшились на *x*. Учитывая, что среднее арифметическое полученной группы чисел равно 34, составим уравнение:

 $\frac{540-x}{20-x}$ = 34.

Так как уравнение не имеет натурального корня, то получить среднее арифметическое 34 не удастся.

в) По условию задачи среднее арифметическое данных 20 чисел равно 27, тогда их сумма 540. Наибольшее среднее арифметическое можно получить, если среди данных чисел будет наибольшее возможное число единиц. Возьмём 6 троек чисел 40, 40, 1 и два числа 27. Среднее арифметическое 20-ти чисел равно 27. Получить больше единиц нельзя. Из шести единиц получим нули и сотрём их, останется 14 чисел, среднее арифметическое которых равно $\frac{540 - 6}{20 - 6}$ = 38$\frac{1}{7}$, увеличить его нельзя.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 38$\frac{1}{7}$.

**4.** На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске не изменилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 30. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 32?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 30. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске. [\*]

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 39$\frac{2}{3}$.

1. Задача составлена в дополнение к задачам сборника [1]. [↑](#footnote-ref-1)
2. Задача из сборника [1], вариант 42. [↑](#footnote-ref-2)