**Задача с параметром. ЕГЭ-2023. Профильный уровень**

 *А. В. Шевкин, avshevkin@mail.ru*

Рассмотрим решение задачи с параметром из сборника для подготовки к ЕГЭ-2023 профильного уровня [1]. Первоначально статья печаталась на сайте, но внимательные читатели указали на ошибку в решении.

**1. (4.3.12.)** Найдите все значения *a*, при каждом из которых система уравнений

$\left\{\begin{array}{c}\frac{\left(y^{2}-xy-7y+4x+12\right)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}}=0, \\a=x+y \end{array}\right.$ (1)

имеет единственное решение.

**Решение.** 1) Если *x* < –4 и (или) *y* ≥ 7, то система не имеет решений.

2) Если *x* = –4 и *y* < 7, то для каждого значения параметра — единственное решение. Например, (–4; 0) и (–4; 1) — решения данной системы при *a* = –4 и *a* = –3 соответственно.

Если *x* = –4, то *y* = *a* + 4 и из неравенства *y* < 7 следует, что для каждого *a* < 3 система имеет единственное решение (–4; *a* + 4).

3) Если *x* > –4 и *y* < 7, то $\sqrt{x+4}$ > 0 и $\sqrt{7-y}$ > 0, поэтому система (1)

имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение

$y^{2}-xy-7y+4x+12=0$ (2)

имеет единственное решение.

Решим уравнение (2) относительно *y*, считая *x* параметром.

$y^{2}-(x+7)y+4x+12=0$.

*D* = $ \left(x+7\right)^{2}-4\left(4x+12\right)=\left(x-1\right)^{2}$.

Уравнение (2) имеет единственный корень в двух случаях: если *D* = 0 и выполнены условия *x* > –4 и *y* < 7, а также если *D* > 0 и для одного из найденных решений не выполнены условия *x* > –4 и *y* < 7.

а) Если *D* = 0, то *x* = 1, *y* — корень уравнения

$y^{2}-8y+16=0$,

$(y-4)^{2}=0$,

то есть пара (1; 4) — единственное решение системы (1) при *a* =1 + 4 = 5.

б) Если *D* > 0, то для любого *x* > –4, *x* ≠ 1 соответствующие значения *y* находим по формуле $y=\frac{x + 7\pm (x - 1)}{2}$: $y\_{1}=4, y\_{2}=x+3$.

В системе координат *xOy* решения (*x*; *y*) системы (1) изобразим точками с координатами (*x*; *y*). Все решения системы (1) из случая 2) изобразим точками прямой *x* = –4, *y* < 4 (синим цветом).



Красным цветом выделены точки, соответствующие решениям (*x*; 4),
*x* > 4, зелёным цветом — решениям (*x*; *x* + 3), –4 < *x* < 4. Все точки, соответствующие решениям из случая 3) находятся ниже прямой *y* = 7 и правее прямой *x* = –4 (эта область выделена цветом).

На пересечении прямых *y* = *x* + 3 и *y* = 4 находится точка (1; 4), соответствующая единственному решению, полученному в случае а).

Теперь выясним, для каких значений параметра *a* система (1) имеет единственное решение. Из второго уравнения системы выразим *y*:
$y=a-x$. «Пробежим» все значения параметра от –∞ до +∞.

Если *a* ≤ –5, то прямая $y=a-x$ будет совпадать с прямой $y=-5-x$ или находиться ниже её. Она пересекает лишь прямую $x=-4$. *Система имеет единственное решение*.

Если –5 < *a* ≤ 0, то прямая $y=a-x$ пересекает прямые $y=x+3$ и $x=-4$. Система имеет два решения.

Если 0 < *a* < 3, то прямая $y=a-x$ пересекает прямые $y=x+3$,
$y=4$, $x=-4$ в трёх точках. Система имеет три решения.

Если 3 ≤ *a* < 5, то прямая $y=a-x$ пересекает прямые $y=x+3$ и
$y=4$ в двух точках. Система имеет два решения.

Если *a* = 5 то прямая $y=a-x$ пересекает прямые $y=x+3$ и
$y=4$ в единственной точке. *Система имеет единственное решение*.

Если 5 < *a* < 11, то прямая $y=a-x$ пересекает прямые $y=x+3$ и $y=4$ в двух точках. Система имеет два решения.

Если *a* ≥ 11, то прямая $y=a-x$ пересекает лишь прямую $y=4$. *Система имеет единственное решение.*

Итак, система (1) имеет единственное решение при следующих значениях параметра: –5 < *a* ≤ 0; *a* = 5; *a* ≥ 11.

**Ответ.** *a* ≤ –5; *a* = 5; *a* ≥ 11.

Эту задачу никак нельзя отнести к простым и понятным задачам на параметры.

**Используемая литература**

**1.** Семёнов А. В. Математика. Профильный уровень. Единый государственный экзамен. Под редакцией И. В. Ященко. МЦНМО. – М.: «Интеллект-центр». 2023.

**P. S.** Благодарю всех авторов комментариев на канале Наблюдатель под первым вариантом статьи и приношу им извинения за удаление комментариев вместе с первым вариантом статьи. Ответ в сборнике для подготовки к ЕГЭ оказался верным.