**Задача на планиметрию с дополнительным построением**

А. В. Шевкин, avshevkin@mail.ru

Рассмотрим решение задачи по планиметрии, для которой разберём два способа решения. Оба требуют дополнительных построений.

**1.** В треугольнике *ABC* точка *D* делит сторону *BC* в отношении *BD* : *DC* = 2 : 1. Величины углов *ACD* и *CAD* равны соответственно $45°$ и $15°$. Найдите величину угла *ABC*.



**Решение.** Обозначим *DC* = *a*, *BD* = 2*a*. Разделим точкой *Е* отрезок *BD* пополам: *BE* = *ED* = *a*. Проведём перпендикуляр *BF* в треугольнике *ABD*, соединим точки *E* и *F*, *C* и *F*.



В треугольнике *ACD* углы *C* и *A* равны соответственно $45°$ и $15°$, угол *ADC* равен 120$°$, а внешний угол *ADB* равен 60$°$, тогда угол *DBF* равен 30$°$.

В прямоугольном треугольнике *BDF* медиана, проведённая к гипотенузе, равна половине гипотенузы, то есть *EF* = *a*, но тогда равнобедренный треугольник *BDF* c углом 60$°$ является равносторонним и *DF* = *a*, угол *BEF* равен 120$°$. Треугольники *BEF* и *FDC* равны по двум сторонам и углу между ними. В них *BF* = *FC* = $a\sqrt{3}$ (по теореме Пифагора в треугольнике *BFD*).

Так как угол *ACF* равен 45$°-30°$ = 15$°$ и равен углу *FAС*, то *AF* = *FC* = *FB*. Тогда в прямоугольном треугольнике *ABF* угол *ABF* равен 45$°$.

Окончательно имеем: ∠*ABC* = 45$°$ + 30$°$ = 75$°$.

Учащимся, изучившим подобие треугольников, можно предложить поискать решение этой задачи при помощи подобия треугольников.

Воспользуемся результатами, полученными при первом способе решения, чтобы не повторяться.

Так как так ∠*ADB* = 60$°$, то построим равносторонний треугольник *BDX*, *BD* = *DX* = *BX* = 2*a*.



Из первого способа решения следует, что *AD* = $a\sqrt{3}+a$. Тогда *AX* = $a\sqrt{3}+a-2a$ = $a\sqrt{3}-a$.

В треугольниках *ADC* и *BXA* стороны, образующие угол 120$°$ пропорциональны, так как *AX* : *DC* = $\left(a\sqrt{3}-a\right):a$ = $\sqrt{3}-1$, а *BX* : *AD* = 2*a* : $\left(a\sqrt{3}+a\right)$ = $\frac{2}{\sqrt{3} + 1}$ = $\frac{2\left(\sqrt{3} - 1\right)}{3 - 1} $= $\sqrt{3}-1$.

А так как ∠*CAD* = $15°$, то ∠*ABX* = $15°$. Окончательно имеем: ∠*ABC* = 45$°$ + 30$°$ = 75$°$.

**Ответ.** 75$°$.

Какое решение выберут ученики при самостоятельном решении — зависит от того, какими теоретическими фактами они уверенно владеют и умеют ли они делать дополнительные построения, уместные в условиях данной задачи.