**Уравнение «на испуг» из варианта для подготовки к ЕГЭ**

*А. В. Шевкин, avsevkin@mail.ru*

Рассмотрим уравнение «на испуг» из сборника для подготовки к ЕГЭ-2023 профильного уровня под редакцией И. В. Ященко.

Основная масса учащихся при виде такого уравнения должна падать в обморок: «Мария Ивановна нам такого никогда не показывала, в учебниках такого нет». Не будем торопиться. Читаем условия задачи.

Найдите все значения 0 ≤ α ≤ 2π, при каждом из которых уравнение

$$sin^{2}α+cos^{8}\frac{α}{2}+5^{x^{4}}=cos^{2}\frac{πx}{2}$$

имеет единственное решение.

**Замечание 1.** По смыслу задачи речь идёт об уравнении с неизвестным *x* и параметром α, да и решение уравнения с одним неизвестным лучше называть корнем уравнения, так как «решение» — это ещё и процесс, и подзаголовок текста. Поэтому задание было бы лучше сформулировать так:

Найдите все значения параметра 0 ≤ α ≤ 2π, при каждом из которых уравнение … имеет единственный корень.

Так надо бы делать, если не поставлена цель сбивать с толку как можно больше учащихся.

**Замечание 2.** Если задание выглядит страшным, то не исключено, что идея его решения проста, надо только внимательно присмотреться. И не торопиться исследовать функции, области их изменения, монотонность…

В данном случае надо заметить, что функции $5^{x^{4}}$ и $cos^{2}\frac{πx}{2}$ чётные, то есть не меняют значения при изменении знака аргумента на противоположный.

**Решение.** Функции $5^{x^{4}}$и $cos^{2}\frac{πx}{2}$ чётные, поэтому если при некотором значении параметра уравнение имеет корень $x\_{0}$, то оно имеет ещё один корень –$x\_{0}$. Следовательно, уравнение имеет единственный корень тогда и только тогда, когда этот корень равен нулю. Подставим в данное уравнение вместо *x* число 0 и найдём значения параметра, при каждом из которых уравнение имеет этот корень.

$sin^{2}α+cos^{8}\frac{α}{2}+1=1$,

$sin^{2}α+cos^{8}\frac{α}{2}=0. $

Сумма чётных степеней равна нулю тогда и только тогда, когда одновременно выполнены условия: $\sin(α)$ = 0 и$cos\frac{α}{2}=0$*.*

В указанном промежутке имеется единственное значение $α$, при котором выполняются оба эти условия, это $α=$ π.

**Ответ.** π.