УЧИМСЯ СТРОИТЬ СЕЧЕНИЯ

*А.В. Шевкин,
Москва, avshevkin@mail.ru*

Аннотация: *В статье рассмотрены два способа построения сечений куба — с помощью следа секущей плоскости и с помощью вспомогательных плоскостей (сечений), даны советы по решению задач, связанных с сечениями.*

Ключевые слова: *Построения сечений; секущая плоскость; след секущей плоскости; вспомогательное сечение.*

Одной из главных проблем, с которой сталкиваются десятиклассники в начале изучения курса стереометрии — это чтение двумерного чертежа, изображающего фигуру трёхмерного пространства. В последние годы эта проблема стала серьёзнее, так как из школьной программы исчез предмет «Черчение», который позволял приучать школьников к чтению пространственного чертежа. Попробуем компенсировать потери с помощью нескольких полезных советов.

В нашем изложении без определений используются понятие куба, который давно известен учащимся. В некоторых случаях будем опираться на интуитивно ясные факты, указывая, что они должны быть позднее доказаны, так как наша задача заключается в том, чтобы научиться строить сечения куба. А это полезно для развития умения видеть объёмное изображение на плоском чертеже и тренировки в использовании первых простых фактов стереометрии. Без таких задач и без раскрытия перспектив применения сечений начальный этап изучения геометрии может показаться скучным.

Строить сечения надо начинать как можно раньше, так как рассуждения о взаимном расположении прямых и плоскостей в таком случае будут опираться на имеющийся у учащихся опыт общения с пространственными фигурами.

Весь материал разбит на три блока — урока, но использовать его можно в той же последова­тельности на нескольких уроках. Звёздочкой выделены задачи «на вырост» — их назначение заключается в том, чтобы показать, какие задачи можно научиться решать, освоив построение сечений.

*Урок 1. Сечения куба*

**1.** Дано изображение куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 (рис. 1). Пересекает ли прямая *BB*1 прямую *DC*?

Нет. Эти прямые лежат в *параллельных плоскостях*[[1]](#footnote-1) *ABB*1и *DCC*1, не имеющих общих точек, поэтому лежащие в них прямые не имеют общей точки. Параллельность противолежащих граней куба мы не доказали ссылками на аксиомы и их следствия, но чуть позже этот факт надо будет доказать с помощью *признака параллельности плоскостей*.

На поставленный вопрос учащиеся иногда отвечают так: «Эти прямые лежат в разных плоскостях».

|  |
| --- |
| СОВЕТ 1. Никогда не употребляйте эту фразу. |

Дело в том, что даже одна прямая *AB* лежит в двух разных плоскостях: *ABB*1 и *ABC*. (Найдите ещё одну такую плоскость. Сколько существует таких плоскостей?) А две прямые могут лежать в разных плоскостях и иметь общую точку. Например, прямые *AB* и *BC* лежат в разных плоскостях *ABB*1 и *BCC*1, но имеют общую точку *B*.

**2.** Назовите другие пары прямых, которые на рисунке 1 кажутся пересекающимися, но на самом не являются таковыми.

Если представить, что некоторая плоскость (называемая *секущей плоскостью*) отсекла от куба его часть, то на «срезе» куба мы увидим многоугольник — *сечение куба*.

****Сечением куба называют многоугольник, стороны которого лежат на поверхности куба и в секущей плоскости.

**3.** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На его ребрах *AA*1 и *CC*1 отметили точки *M* и *N* соответственно так, что *AM*: *MA*1 = *CN*:*NC*1 = 1 : 3. Постройте сечение куба плоскостью *MND*1.

|  |
| --- |
| СОВЕТ 2. Данные точки секущей плоскости и прямые, принадлежащие секущей плоскости, выделяйте цветом. |

Следуя совету 2, выделим точки *M*, *N* и *D*1 зелёным цветом (рис. 2[[2]](#footnote-2)). Проведём прямые *D*1*M* и *D*1*N* — их тоже выделим зелёным цветом. Выделение цветом подчёркивает принадлежность точек, прямых, отрезков секущей плоскости.

|  |
| --- |
| СОВЕТ 3. Проводя прямую, думайте о том, в какой плоскости она лежит и не пересекает ли построенная прямая какую-либо прямую этой плоскости. |

Следуя совету 3, в плоскости *ADD*1 найдём точку *X* — пересечение прямых *D*1*M* и *AD*, а в плоскости *CDD*1 — точку *Y* — пересечение прямых *D*1*N* и *DC*. Точки *X* и *Y* тоже выделим зелёным цветом — они лежат в секущей плоскости.

Теперь в плоскости *ABC* проведём прямую *XY*, она пересечёт прямые *AB* и *BC* плоскости *ABC* в точках *K* и *L* соответственно. Прямую *XY* и полученные точки пересечения выделим зелёным цветом (рис. 4).

В плоскости *ABB*1 соединим отрезком точки *M* и *K*, а в плоскости *BCC*1 — точки *N* и *L*. Эти отрезки тоже выделим цветом. Отрезки *MK*, *KL*, *LN*, *ND*1 и *D*1*M* лежат на поверхности куба и в секущей плоскости. Они составляют границу многоугольника *MKLND*1, являющегося сечением куба плоскостью *MND*1. Сечение выделим жирной линией.

Прямую пересечения секущей плоскости с плоскостью основания куба называют *следом секущей плоскости.*

**4.** Запишем построение сечения[[3]](#footnote-3).

**Построение.**

1) *D*1*M*; *D*1*M* $∩$ *AD* = *X*;

2) *D*1*N*; *D*1*N* $∩$ *DC* = *Y*;

3) *XY* — след секущей плоскости *MND*1;

*XY* $∩$ *AB* = *K*; *XY* $∩$ *BC* = *L*;

4) *MK*;

5) *NL*; *MKLND*1 *—* искомое сечение.

**Домашнее задание.**

**5.** Почему *MKLND*1 является многоугольником?

**6.** Докажите, что прямая *D*1*M* принадлежит секущей плоскости.

**7.** Пусть в задаче **3** ребро куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равно *a*. Вычислите длины отрезков *AX*, *AK*, *CL*, *CY*.

**8.** На ребрах *AA*1 и *СС*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 отметили точки *M* и *N* соответственно так, что *AM*: *MA*1 = *CN*:*NC*1 = 1 : 3. На ребре *DD*1 отметили точку *P* так, что *DP*: *PD*1 = 3 : 1. Постройте сечение куба плоскостью *MNP*.

**9.\*** Вычислите площадь сечения, построенного в задаче **3**, если ребро куба равно *a*.

*Указание.* Вычислите площадь треугольника *XD*1*Y*, потом площади двух подобных ему треугольников.

**10.\*** *Задача «на вырост»[[4]](#footnote-4).* В каком отношении сечение делит объём куба в задаче **3**?

*Указание.* Посмотрите в учебнике *перпендикуляр к плоскости*, *признак перпендикулярности прямой и плоскости*, *формулу объёма пирамиды*, поду­майте, как можно вычислить объём части куба, заключённой под сечением куба.

*Урок 2. Сечения куба*

**Разбор домашнего задания**

***5.*** Из построения следует, что отрезки *MK*, *KL*, *LN*, *ND*1 и *D*1*M* лежат в секущей плоскости и образуют замкнутую ломаную, не имеющую самопересечений. *MKLND*1 является многоугольником по определению.

***6.*** Точки *D*1 и *M* принадлежат секущей плоскости. Через них провели прямую *D*1*M*, все точки которой принадлежат этой плоскости. Поэтому прямая *D*1*M* принадлежит секущей плоскости. Это следует из аксиомы I планиметрии, в которой сказано: Через любые две точки можно провести прямую, и только одну. (Погорелов, 7-9 классы, с. 4).

***7.*** Пусть *XA* = *x*. Из подобия треугольников *XDD*1 и *XAM* (по двум углам) следует, что $\frac{x+a}{x}$ = $\frac{a}{\frac{a}{4}}$, откуда *x* = $\frac{a}{3}$. Итак, *XA* = $\frac{a}{3}$, аналогично *CY* = $\frac{a}{3}$. Тогда
*XD* = *YD* и углы при основании равнобедренного прямоугольного треугольника *XDY* равны по 450. Но тогда треугольники *XAK* и *LCY* прямоугольные с острым углом 450, они равнобедренные, следовательно, *AX* = *AK* = *CL* = *CY* = $\frac{a}{3}$.

***8.*** **Построение.**

1) *PM*; *PM* $∩$ *AD* = *X*;

2) *PN*; *PN* $∩$ *DC* = *Y*;

3) *XY* — след секущей плоскости *MNP*; *XY* $∩$ *AB* = *K*; *XY* $∩$ *BC* = *L*;

4) *MK*;

5) *NL*; *MKLNP —* искомое сечение.

***9.*** **Ответ.** $\frac{7a^{2}\sqrt{34}}{36}$.

***10.*** **Ответ.** 25: 11.

На рисунке 5 прямая *PN* пересекает плоскость *ABC* в точке *Y*. Такую прямую называют наклонной к плоскости, или коротко: *наклонной*. Из точки *P* проведён *перпендикуляр PD* *к плоскости ABC*. Точку *D* называют проекцией точки *P* на плоскость *ABC*. Аналогично точка *C* — проекция точки *N* на плоскость *ABC*. Заметим, что наклонная *PN* и её проекция *DC* пересекаются в точке *Y*, принадлежащей следу секущей плоскости.

**11.** Назовите пять пар наклонных и их проекций (рис. 5). Где лежит точка пересечения наклонной и её проекции на плоскость?

|  |
| --- |
| СОВЕТ 4. Помните: точка пересечения наклонной и её проекции на плоскость принадлежит следу секущей плоскости. |

**12.** Докажите утверждение, содержащееся в совете 4.

**13.** Ребро куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 равно *a*. На ребрах *AA*1 и *BB*1 куба отметили точки *M* и *N* соответственно так, что *AM*: *MA*1 = 1 : 3, *CN*=*NC*1. На ребре *DD*1 отметили точку *P* так, что *DP*: *PD*1 = 3 : 1. Постройте сечение куба плоскостью *MNP*. Докажите, что след секущей плоскости проходит через точку *B*.

**Построение.**

1) *PM*;

*PM* $∩$ *AD* = *X*;

2) *PN*;

*PN* $∩$ *DC* = *Y*;

3) *XY* — след секущей плоскости *MNP*; *B* ϵ *XY* (доказа­тельство ниже);

4) *MB*;

5) *BN*;

*MBNP —* искомое сечение.

Докажем, что *B* ϵ *XY*. *MA =* $\frac{a}{4}$, *PD =* $\frac{3a}{4}$, *NC =* $\frac{a}{2}$. Из подобия треугольников *PDY* и *NCY* (по двум углам) следует, что *CY* = 2*a*. Аналогичноиз подобия треугольников *MAX* и *PDX* следует, что *XA* = $\frac{a}{2}$.

Рассмотрим треугольники *DXY* и *AXB*. Так как *DY* : *AB* = *DX* : *AX =* 3, углы *D* и *A* этих треугольников равны, то треугольники *DXY* и *AXB* подобны (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно, углы *DXY* и *AXB* равны и
*B* ϵ *XY*, что и требовалось доказать.

**14.** Изучите понятия *параллельные плоскости*, *признак параллельности двух плоскостей*. Найдите на рисунке 6 параллельные плоскости. Докажите, что если плоскость пересекает две параллельные плоскости, то линии пересечения параллельны.

**15.** Докажите, что сечение куба, полученное в задаче **13**, является параллелограммом.

**Домашнее задание**

**16.\*** Вычислите площадь сечения, построенного в задаче **13**.

**17.\*** В каком отношении сечение делит объём куба в задаче **13**?

**18.** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. *M* и *N* — середины рёбер *AA*1 и *СС*1 соответственно. На ребре *DD*1 отметили точку *P* так, что *DP*: *PD*1 = 3 : 1. Постройте сечение куба плоскостью *MNP*. Определите вид многоугольника, являющегося сечением куба.

*Урок 3. Сечения куба*

**Разбор домашнего задания**

***16.*** По теореме Пифагора вычислим длины отрезков:

*PX =* $\frac{3a\sqrt{5}}{4}$, *PY =* $\frac{3a\sqrt{17}}{4}$, *XY =* $\frac{3a\sqrt{5}}{4}$.

Сначала найдём площадь треугольника, подобного нашему, у которого стороны: $\sqrt{5}, \sqrt{17}, 2\sqrt{5}$. Коэффициент подобия *k* = $\frac{3a}{4}$*.* По формуле Герона она равна $\sqrt{21}$. Затем полученный результат умножим на квадрат коэффициента подобия *k*2. Площадь треугольника *XPY* равна $\frac{9a^{2}\sqrt{21}}{16}.$ Теперь найдём площади двух подобных ему треугольников *XMB* и *BNY*: $\frac{a^{2}\sqrt{21}}{16} $ и $ \frac{4a^{2}\sqrt{21}}{16}. $ Площадь сечения равна $\frac{(9 - 1- 4)a^{2}\sqrt{21}}{16}$ = $\frac{a^{2}\sqrt{21}}{4}$.

***17.*** **Ответ.** 5 : 3.

***18.*** В отличие от предыдущих случаев, здесь след секущей плоскости не пересекает основания куба. Представим, что секущая плоскость пересекает ребро *BB*1 в точке *K*. Тогда в плоскости *BCC*1 наклонная *NK* должна пересекать свою проекцию *BC* на плоскость *ABC* в точке *L*, принадлежащей следу секущей плоскости. Значит, точку *L* можно найти как пересечение прямых *BC* и *XY*, а точку *K —* как пересечение прямых *BB*1и *NL* (закончите построение).

В задаче **14** было доказано, что если плоскость пересекает две параллель­ные плоскости, то линии пересечения параллельны. Поэтому *MK* | | *PN*, *MP* | | *KN*, следовательно, сечение — параллелограмм.

**19.** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На его рёбрах *DD*1 и *BB*1 отметили точки *P* и *N* соответственно так, что *DP*: *PD*1 = 3 : 1, *BN*: *NB*1 = 1 : 3. *M* — середина ребра *AA*1. Постройте сечение куба плоскостью *MNP*.

Здесь можно построить точку *X* пересечения прямых *MP* и *AD*. Далее — точку *Y* пересечения прямых *MN* и *AB*. *XY* — след секущей плоскости (закончите построение).

*Замечание.* Через две параллельные прямые *BB*1 и *DD*1 можно построить плоскость *DBB*1, дающую вспомогательное сечение куба *DBB*1*D*1. Проведём в этой плоскости прямую *PN* — это наклонная к плоскости *ABC*, она пересекает свою проекцию *DB* на плоскость *ABC* в точке *Z*, принадлежащей следу секущей плоскости. Следовательно, след секущей плоскости можно строить и с помощью вспомогательной плоскости.

**20.** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На его ребре *DD*1, на гранях *ABB*1*A*1 и *BСС*1*B*1 отметили точки *K*, *M* и *N* как показано на рисунке 8. Постройте сечение куба плоскостью *MNK*.

В плоскости *ABB*1 через точку *M* проведём прямую *ST*, параллельную ребру *AA*1, а значит, и ребру *DD*1 (рис. 9). Через параллельные прямые *DD*1 и *ST* проведём плоскость, она пересечёт нижнее и верхнее основания куба по прямым *DS* и *D*1*T*. Получим вспомогательное сечение куба *SDD*1*T*. В плоскости этого сечения проведём прямые *MK* и *DS*. Они пересекаются в точке *X* — это первая точка следа секущей плоскости.

Аналогично в плоскости *BCC*1 через точку *N* проведём прямую *PR*, параллельную ребру *CC*1, а значит, и ребру *DD*1 и построим вспомогательное сечение куба *DPRD*1. На пересечении прямых *DP* и *KN* получим вторую точку следа секущей плоскости — *Y* (закончите решение).

**Домашнее задание**

**21.** Можно ли выбрать на поверхности куба три точки так, что в сечении куба плоскостью, проходящей через эти точки, получится семиугольник? Объясните свой ответ.

**22.** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На его рёбрах *DD*1, *DC* и на грани *ADD*1*A*1 отметили точки *K*, *N* и *M* как показано на рисунке 8. Постройте сечение куба плоскостью *MNK*.

**23.** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. На его ребре *DD*1, на гранях *ADD*1*A*1 и *BСС*1*B*1 отметили точки *K*, *M* и *N* как показано на рисунке 8. Постройте сечение куба плоскостью *MNK*.

**24.\*** Дан куб *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1. Точки *M*, *N* и *K* являются серединами его рёбер *AB*, *CC*1 и *A*1*D*1. Постройте сечение куба плоскостью *MNK*. Докажите, что это сечение является правильным шестиугольником.

*Замечание*. Кроме способа построения, аналогичного уже применявшимся, здесь можно воспользоваться советом:

|  |
| --- |
| СОВЕТ 5. Умный в гору не пойдёт, умный гору обойдёт. |

Для этого надо построить замкнутую ломаную, соединив последовательно середины рёбер: *AB*, *BC*, *CC*1, *C*1*D*1, *D*1*A*1и *A*1*A*. Потом доказать, что полученная ломаная лежит в плоскости *MNK*, проходит через заданные точки и является правильным шестиугольником.

Весьма интересный персонаж Е. Евстигнеева в фильме Э. Рязанова «Берегись автомобиля» сказал: «А не замахнуться ли нам на Вильяма, понимаете ли, нашего Шекспира?» Мы только начали заниматься сечениями, но возникает похожий вопрос: «А не замахнуться ли нам на задачу из подготовительного сборника к ЕГЭ?» На первых порах достаточно решить задание а), но если уже изучены теоретические сведения, необходимые для задания б), то эта задача нам уже по силам.

**25.\*** В прямоугольном параллелепипеде *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 известны длины рёбер *AA*1 = 15, *AB* = 12, *AD* = 8.Точка *K* — середина ребра *C*1*D*1,а точка *L* делит ребро *BB*1 в отношении 4 : 1, считая от вершины *B*1.

а) Найдите отношение, в котором плоскость *LKA*1 делит ребро *CC*1, считая от вершины *C*1.

б) Найдите косинус *угла между плоскостями* *LKA*1 и *A*1*B*1*C*1.

**Разбор домашнего задания**

***21.*** Чтобы в сечении куба плоскостью получится семиугольник, стороны семиугольника должны принадлежать семи разным граням куба, а их всего 6. Следовательно, выбрать три такие точки невозможно.

*****24*.\*** **Построение.**

1) *P*, *R* и *S —* середины отрезков *C*1*D*1, *BC* и *AA*1 соответственно.

2) *KP*, *PN*, *NR*, *RM*, *MS* и *SK*; *KPNRMS* — искомое сечение.

**Доказательство.**

*KP* | | *A*1*C*1, *A*1*C*1 | | *AC*, *AC* | | *MR*, следовательно, *KP* | | *MR* и точки *K*, *P*, *M* и *R* принадлежат одной плоскости, обозначим её α.

*MR* $∩$ *DC* = *Y*, *Y* ϵ α.

Так как *M* и *R* середины отрезков *AB* и *BC* и *ABCD* — квадрат, то *MB* = *BR* = *RC*, а
*RC* = *CY* (из равенства треугольников *MBR* и *YCR* по катету и прилежащему острому углу).

Пусть *PY* $∩$ *CC*1 = *N*1. Из равенства треугольников *PC*1*N*1и *YCN*1по катету и противолежащему углу следует, что *C*1*N*1 *= CN*1, то есть *N*1 — середина отрезка *CC*1. Следовательно, точки *N*1 и *N* совпадают. Тогда *N* принадлежит плоскости α и плоскость α совпадает с плоскостью *MNK*.

Аналогично показывается, что *S* ϵ *MNK*. Тогда все вершины шестиугольника *KPNRMS* лежат в плоскости *MNK* и *KPNRMS —* искомое сечение, что и требовалось доказать.

Теперь докажем, что построенное сечение является правильным шести­угольником. Если *AB* = *a*, то по теореме Пифагора *KP* = *PN* = *NR* = *RM* = *MS* =
= *SK* = *NY* = *RY* = 0,5*a*$\sqrt{2}$, то есть стороны шестиугольника равны и треугольник *NRY* — равносторонний. Тогда внутренние углы шестиугольника *R* и *N* равны 120$°$, как смежные с углами равностороннего треугольника. Аналогично показывается, что все внутренние углы шестиугольника равны 120$°$, следовательно, этот шестиугольник правильный.

***25.\** Построение.**

1) *A*1*K*; *A*1*K* $∩$ *B*1*C*1 = *M*;

2) *ML*;

*ML* $∩$ *С*1*С* = *N*;

3) *KN*;

*A*1*KNL —* искомое сечение.

а) Теперь вычислим отношение *C*1*N* : *NC*.

Из условия задачи следует, что *KC*1 = 6,
*B*1*L* = 12. Из подобия треугольников *A*1*B*1*M* и *KC*1*M* следует, что *B*1*M* = 16, тогда *C*1*M* = 8 и *C*1*N* — средняя линия треугольника *B*1*ML*, поэтому *C*1*N* = 0,5*B*1*L* = 6, а *NC* = 15 – 6 = 9.

Итак, *C*1*N* : *NC* = 6 : 9 = 2 : 3.

б) Теперь вычислим косинус угла между плоскостями *LKA*1 и *A*1*B*1*C*1. Для этого найдём по теореме Пифагора *KM*2 = *C*1*M*2 *+ C*1*K*2 = 82 *+* 62 *=* 100, *KM =* 10. Треугольники *KC*1*M* и *NC*1*M* равны по двум катетам, следовательно, *NM = KM* =
= 10. Из вычисления площади треугольника *KC*1*M* двумя способами получим
*C*1*P* = 4,8. В треугольнике *KMN* *KM = MN* = 10, *KN =* 6$\sqrt{2}$, а высота, проведённая к основанию, равна$\sqrt{82}$. Из вычисления площади треугольника *KMN* двумя способами получим *NP* = 1,2$\sqrt{41}$.

Учитывая, что *C*1*N* является перпендикуляром к плоскости *A*1*B*1*C*1, по теореме о трёх перпендикулярах прямая *PN* перпендикулярна прямая *KM*, тогда угол *C*1*PN* является углом между плоскостями *LKA*1 и *A*1*B*1*C*1. Его косинус равен $\frac{C\_{1}P}{PN}$ = $\frac{4,8}{1,2\sqrt{41}}$ = $\frac{4}{\sqrt{41}}$.

*Замечание* 1. Если к моменту решения задачи изучено вычисление площади проекции фигуры, то, учитывая, что треугольник *KC*1*M* является проекцией треугольника *PC*1*N*, верно равенство $S\_{KC\_{1}M}$ = $S\_{KNM}$∙cos *C*1*PN*. Откуда можно получить cos *C*1*PN*, вычислив предварительно площади треугольников *KC*1*M* и *KNM*.

*Замечание* 2. Решение экзаменационной задачи записано достаточно подробно с учебной целью, но и в нём некоторые очевидные вычисления пропущены и записаны их результаты. На экзамене запись решения может быть короче.

1. Здесь и далее выделенный *курсивом* термин или факт может оказаться ещё не изученным на момент чтения статьи, надо обязательно найти его в учебнике, понять его смысл. [↑](#footnote-ref-1)
2. Постройте в тетради рисунок 2, дополняйте его до получения сечения, следуя тексту. [↑](#footnote-ref-2)
3. Под каждым новым номером в записи построения дан новый шаг построения и его результаты, если они есть. [↑](#footnote-ref-3)
4. Похожие задачи раньше встречались на конкурсных экзаменах в вузы. [↑](#footnote-ref-4)