**Пробуем «поступить» в МИРЭА-2002**

Готовящимся к сдаче ЕГЭ профильного уровня по математике полезно решать задачи конкурсных экзаменов до «эпохи ЕГЭ» —для расширения кругозора в тематике и в способах решения задач по математике. Это полезно не только для успешной сдачи ЕГЭ, но и для последующего обучения в вузе. Можно попробовать «поступить» в МИРЭА-2002.

Желательно сначала попытаться решить задачу, а потом разбирать её решение.

**Билет № 101**

**1.** Решите уравнение

**2.** Решите уравнение

**3.** Решите неравенство

**4.** Решите уравнение .

**5.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты и, пересекающиеся в точке *H*. Из центра *O* описанной окружности на сторону *BC* опущен перпендикуляр *OK*, продолжение которого за точку *K* пересекает описанную окружность в точке *D*. Известно, что отрезок *AD* перпендикулярен *OH*, и, . Найдите стороны треугольника *ABC*.

**6.** Найдите наибольшее из значений, которые принимает выражение
*A* = *x* + 7*y*, если *x* и *y* удовлетворяют неравенству *.*

Найдите все пары чисел (, при которых это значение достигается.

**Решения**

В первом задании ограничимся ответом.

**1.** Решите уравнение

**Ответ.** 15.

**2.** Решите уравнение

 (1)

Преобразуем левую часть уравнения, пользуясь формулами

,

:

,

,

,

,

,

. (2)

Все решения уравнения (2) найдём, объединив все решения трёх уравнений:

1), 2), 3),

 , , ,

 , ; , ; , .

Учитывая, что при чётных *n* = 2*k* верно равенство , все решения уравнения 2) являются решениями уравнения 1).

Все решения уравнения (2), а значит, и равносильного ему уравнения (1) задаются двумя формулами: , ; , .

**Ответ.** , ; , .

**3.** Решите неравенство

 (3)

Сначала найдём ограничения на *x*:

*x* 0, *x* –1, *x* 1, *x*, *x*. (4)

Решим неравенство (3) на множестве *M* всех значений *x*, удовлетворяющих условиям (4).

1) На множестве всех таких *x* из *M*, для которых , неравенство (3) равносильно неравенству

,

равносильному неравенству

,

 0,

 0. (5)

Все решения неравенства (5) составляют отрезок [; ], из них неравенству условиям (4) удовлетворяют лишь числа из множества Поэтому решениями неравенства (3) являются лишь

2) На множестве всех таких *x* из *M*, для которых , верны неравенства и , поэтому неравенство (3) равносильно неравенству

,

равносильному неравенству

,

. (6)

Все решения неравенства (6) составляют промежуток [; +), из них неравенству условиям (4) удовлетворяют лишь числа из множества Поэтому решениями неравенства (3) являются лишь

Объединив все решения, найденные в пунктах 1) и 2), получим множество всех решений неравенства (3):

 .

**Ответ.** .

**4.** Решите уравнение

. (7)

Умножим числитель и знаменатель третьей дроби на 2:

,

. (8)

Все дроби в уравнениях (7) и (8) имеют смысл при , поэтому уравнение (8) равносильно уравнению

.

Извлекая корень третьей степени, получим уравнение равносильное уравнению (8):

 ,

 5,

 ,

,

5,4.

Условие выполнено, значит, 5,4 — единственный корень уравнения (7).

**Ответ.** 5,4.

**5.** В остроугольном треугольнике *ABC* проведены высоты и, пересекающиеся в точке *H*. Из центра *O* описанной окружности на сторону *BC* опущен перпендикуляр *OK*, продолжение которого за точку *K* пересекает описанную окружность в точке *D*. Известно, что отрезок *AD* перпендикулярен *OH*, и, . Найдите стороны треугольника *ABC*.

 Рис. 1 / Рис. 2

На рисунке 1 изображён треугольник *ABC*, около которого описана окружность с центром *O*. Из вершин *A* и *C* проведены высоты, и , пересекающиеся в точке *H*. Проведём высоту и отрезки *AO* и *AD*,
*M* — точка пересечения *AD* и *OH* (рис. 2).

1) В треугольнике по теореме Пифагора найдём катет:

 = ;

2) и , значит, и *HAD* = *ODA*;

3) *AD* и *OD* — радиусы одной окружности, значит, и
*ODA* = *OAD*;

4) из пунктов 2) и 3) следует, что*HAD* = *OAD*, тогда *AM* — высота и биссектриса в *HAO*, следовательно, *AO* = *AH* = ;

5)*HA* и *BA* подобны по двум углам, значит, *HA* = *BA*. Обозначим величины этих углов , ;

6) по следствию из теоремы синусов, *AC* 2*AO*;

7) в треугольнике по теореме Пифагора найдём катет:

 ;

8) *HA* и *BC* подобны по двум углам, значит, , откуда следует, что *BC* : = : 16, *BC* = 28; : 16 = , , тогда *AB* = 16 + 4 = 20.

Итак, *AB* = 20, *BC* = 28, *AC*

**Ответ.** 20, 28, 32.

**6.** Найдите наибольшее из значений, которые принимает выражение
*A* = *x* + 7*y*, если *x* и *y* удовлетворяют неравенству

*.* (9)

Найдите все пары чисел (, при которых это значение достигается.

Из равенства *A* = *x* + 7*y* выразим *x* через *y*: *x* = *A* – 7*y*, перепишем неравенство (9) в виде

(,

 8. (10)

Найдём наибольшее значение *A*, при котором неравенство (12) имеет решения. Вычислим дискриминант квадратного трёхчлена:

*D* 9– 32 23

График функции *z* 8 — парабола, ветви которой направлены вверх.

1) Если 4, т. е. если < , то *D* > 0, парабола пересекает ось абсцисс (*Oy*) и неравенство (10) имеет решения на некотором промежутке значений *y*.

2) Если 4, т. е. если или , то *D* = 0, парабола касается оси абсцисс и неравенство (10) имеет решения и для , и для .

3) Если 4, то *D* < 0 парабола не касается оси абсцисс и неравенство (10) не имеет решений ни для каких значений *y*.

 1) 4, *D* > 0 2)4, *D* = 0 3) 4, то *D* < 0

 — наибольшее значение , при котором неравенство (10) имеет решения. При этом неравенство 8 имеет единственное решение , для которого *x* = 8 – 7. Поэтому числу *A* = 8 соответствует пара чисел *x* = –2,5, *y* = 1,5.

**Ответ.** *A* = 8, *x* = –2,5, *y* = 1,5.