**Метод интервалов для непрерывных функций,**

**или Поучительные нестрогие неравенства**

Рассмотрим применение метода интервалов для непрерывных функций, описанного в нашем учебнике[[1]](#footnote-1), применительно к решению нестрогих неравенств. Сначала уточним одно понятие.

*Областью существования функции* называют множество всех значений аргумента, при каждом из которых можно найти значение функции. Область определения функции может совпадать с областью существования или быть её частью. Всё определяется условиями конкретной задачи. Например, у функции *f* (*x*) = *x*2 область существования ***R***, но если эта функция задаёт площадь квадрата со стороной 0 < *x* < 10, то область определения функции — интервал (0; 10).

Все решения в данном тексте написаны максимально подробно с учебной целью. На контрольной работе или экзамене решение может быть кратким, но должно остаться обоснованным.

**1.** Решите неравенство:

$\frac{3^{\sqrt{9 - x^{2}}}(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)} \leq 0.$ (1)

**Решение.** Область существования функции *f* (*x*) =$ \frac{3^{\sqrt{9 - x^{2}}}(x - 1)}{(x + 2)(x + 1)}$, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: $9 - x^{2} $≥ 0, *x* ≠–2 и *x* ≠–1, т. е. *M* = [$-3$; –2)$ ∪\left(-2;-1\right)∪(-1;3]$. Так как *f* (–3) < 0,
*f* (3) > 0, то число *x*1 = –3 является решением неравенства (1), а число *x*2 = 3 — нет. Функция имеет единственный нуль *x*3 = 1, это число является решением неравенства (1).

Исключив концы промежутков (*x*1 и *x*2) и нуль функции (*x*3) из множества *M*, получим множество *M*1, состоящее только из интервалов: (–3; –2), (–2; –1), (–1; 1) и (1; 3). Функция *f* (*x*) непрерывна на каждом из этих интервалов, определим её знак в любой точке каждого из них (рис. 1).

Следовательно, множество всех решений неравенства (1) есть объединение интервалов (–3; –2), (–1; 1) и чисел *x*1 = –3 и *x*3 = 1.

**Ответ.** [–3; ­–2)$ ∪$ (–1; 1].

**2.** Решите неравенство:

$\frac{2^{\sqrt{9 - x^{2}}}(x^{2} - 9)}{(x- 2)(x + 1)} \geq 0.$ (2)

**Решение.** Область существования функции *f* (*x*) =$ \frac{2^{\sqrt{9 - x^{2}}}(x^{2} - 9)}{(x - 2)(x + 1)}$, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: $9-x^{2} $≥ 0,
*x* ≠2 и *x* ≠–1, т. е. *M* = $[-3; -1)∪(-1;2)∪($2; 3]. Так как *f* (–3) = 0, *f* (3) = 0, то числа *x*1 = –3 и *x*2 = 3 являются нулями функции *f* (*x*) и решениями неравенства (2).

Исключив концы промежутков (они же нули функции) — числа *x*1 и *x*2 — из множества *M*, получим множество *M*1, состоящее только из интервалов:
(–3; –1), (–1; 2) и (2; 3). Функция непрерывна на каждом из них. Определим знак функции в любой точке каждого из этих интервалов (рис. 2).

Следовательно, множество всех решений неравенства (2) есть объединение интервала (–1; 2) и чисел *x*1 = –3 и *x*2 = 3.

**Ответ.** $\left(-1;2\right)∪\{-3;3\}$.

**3.** Решите неравенство:

$\frac{\sqrt{4x + 7} - 3x + 5}{16 - 3x^{2} + 22x}\leq 0.$ (3)

**Решение.** Неравенство (3) равносильно неравенству

$\frac{\sqrt{4x + 7} - 3x + 5}{ (x + \frac{2}{3})(x - 8)}\geq 0.$ (4)

Область существования функции *f* (*x*) = $\frac{\sqrt{4x + 7} - 3x + 5}{ (x + \frac{2}{3})(x - 8)}$, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: 4*x* + 7$ $≥ 0,
*x* ≠­$-\frac{2}{3}$ и *x* ≠8, т. е. *M* = [$-\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$)$ ∪(-\frac{2}{3};8)∪(8$; +$\infty $). Так как *f* ($-\frac{7}{4}$) > 0, то число *x*1 = $-\frac{7}{4}$ является решением неравенства (4). Чтобы найти нули функции, решим уравнение

$\sqrt{4x + 7} - 3x + 5 $= 0. (5)

Уравнение (5) равносильно системе

$\left\{\begin{array}{c}4x + 7=(3x- 5)^{2},\\3x- 5\geq 0. \end{array}\right.$ (6)

Система (6) имеет единственное решение *x*2 = $\frac{17+\sqrt{127}}{9}$. Это число является единственным корнем уравнения (5) и единственным нулём функции *f* (*x*), а значит, оно является и решением неравенства (4).

Исключив конец промежутка и нуль функции — числа *x*1 и *x*2 — из множества *M*, получим множество *M*1, состоящее только из интервалов:
($-\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$), ($-\frac{2}{3};x\_{2})$, ($x\_{2}; 8)$ и $(8; +\infty $). Функция непрерывна на каждом из них. Определим знак функции в любой точке каждого из этих интервалов (рис. 3).

Следовательно, множество всех решений неравенства (4), а значит, и равносильного ему неравенства (3), есть объединение интервалов ($-\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$), ($x\_{2}; 8)$ и чисел *x*1 = $-\frac{7}{4}$ и *x*2 = $\frac{17+\sqrt{127}}{9}$.

**Ответ.** [$-\frac{7}{4}$; $-\frac{2}{3}$)$ ∪$ [$\frac{17+\sqrt{127}}{9}; 8)$.

**4.** Решите неравенство:

$\frac{\left(1 + \sqrt{\cos(x -1)}\right) \left(x^{2} - 7x\right)}{x^{2} + 7x}\leq 0.$ (7)

**Решение.** Область существования функции *f* (*x*) = $\frac{\left(1 + \sqrt{\cos(x -1)}\right) \left(x^{2} - 7x\right)}{x^{2} + 7x}$, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: $\cos(x -1) $≥ 0, $x$≠ *–*7, и $x$≠0, т. е. множество *M* состоит из чисел 2π*k*, где *k* — любое целое число, кроме 0. Так как числа 0 и 7 не принадлежат множеству *M* и $1 + \sqrt{\cos(x -1)}$ ≠ 0, то у функции *f* (*x*) нет нулей. Остаётся проверить, в каких точках множества *M* дробь $\frac{ x^{2} - 7x}{x^{2} + 7x}$ принимает отрицательные значения. Для этого решим неравенство

$\frac{ x^{2} - 7x}{x^{2} + 7x}$ < 0. (8)

Неравенство (8) имеет множество решений (–7; 0) $∪$ (0; 7) (рис. 4).

Этому множеству решений принадлежат лишь два числа –2π и 2π из множества *M*. Только они и являются решениями неравенства (7).

**Ответ.** –2π и 2π.

Выражаю благодарность учителю математики М.Г. Назарову за помощь в подготовке материала к публикации.

А.В. Шевкин,

avshevkin@mail.ru

10.06.2017

1. Подробнее см. п. 12.3 из учебника «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс» (С. М. Никольский и др.). [↑](#footnote-ref-1)