**Метод интервалов для непрерывных функций,**

**или Поучительные нестрогие неравенства**

Рассмотрим применение метода интервалов для непрерывных функций, описанного в нашем учебнике[[1]](#footnote-1), применительно к решению нестрогих неравенств. Сначала уточним одно понятие.

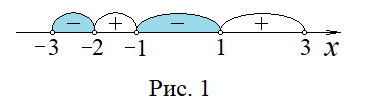
*Областью существования функции* называют множество всех значений аргумента, при каждом из которых можно найти значение функции. Область определения функции может совпадать с областью существования или быть её частью. Всё определяется условиями конкретной задачи. Например, у функции *f* (*x*) = *x*2 область существования ***R***, но если эта функция задаёт площадь квадрата со стороной 0 < *x* < 10, то область определения функции — интервал (0; 10).

Все решения в данном тексте написаны максимально подробно с учебной целью. На контрольной работе или экзамене решение может быть кратким, но должно остаться обоснованным.

**1.** Решите неравенство:

(1)

**Решение.** Область существования функции *f* (*x*) =, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: ≥ 0, *x* ≠–2 и *x* ≠–1, т. е. *M* = [; –2). Так как *f* (–3) < 0,   
*f* (3) > 0, то число *x*1 = –3 является решением неравенства (1), а число *x*2 = 3 — нет. Функция имеет единственный нуль *x*3 = 1, это число является решением неравенства (1).

Исключив концы промежутков (*x*1 и *x*2) и нуль функции (*x*3) из множества *M*, получим множество *M*1, состоящее только из интервалов: (–3; –2), (–2; –1), (–1; 1) и (1; 3). Функция *f* (*x*) непрерывна на каждом из этих интервалов, определим её знак в любой точке каждого из них (рис. 1).

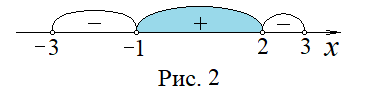
Следовательно, множество всех решений неравенства (1) есть объединение интервалов (–3; –2), (–1; 1) и чисел *x*1 = –3 и *x*3 = 1.

**Ответ.** [–3; ­–2) (–1; 1].

**2.** Решите неравенство:

(2)

**Решение.** Область существования функции *f* (*x*) =, множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: ≥ 0,   
*x* ≠2 и *x* ≠–1, т. е. *M* = 2; 3]. Так как *f* (–3) = 0, *f* (3) = 0, то числа *x*1 = –3 и *x*2 = 3 являются нулями функции *f* (*x*) и решениями неравенства (2).

Исключив концы промежутков (они же нули функции) — числа *x*1 и *x*2 — из множества *M*, получим множество *M*1, состоящее только из интервалов:   
(–3; –1), (–1; 2) и (2; 3). Функция непрерывна на каждом из них. Определим знак функции в любой точке каждого из этих интервалов (рис. 2).

Следовательно, множество всех решений неравенства (2) есть объединение интервала (–1; 2) и чисел *x*1 = –3 и *x*2 = 3.

**Ответ.** .

**3.** Решите неравенство:

(3)

**Решение.** Неравенство (3) равносильно неравенству

(4)

Область существования функции *f* (*x*) = , множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: 4*x* + 7≥ 0,   
*x* ≠­ и *x* ≠8, т. е. *M* = [; ); +). Так как *f* () > 0, то число *x*1 = является решением неравенства (4). Чтобы найти нули функции, решим уравнение

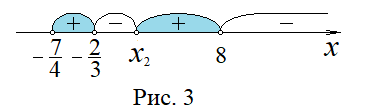
= 0. (5)

Уравнение (5) равносильно системе

(6)

Система (6) имеет единственное решение *x*2 = . Это число является единственным корнем уравнения (5) и единственным нулём функции *f* (*x*), а значит, оно является и решением неравенства (4).

Исключив конец промежутка и нуль функции — числа *x*1 и *x*2 — из множества *M*, получим множество *M*1, состоящее только из интервалов:   
(; ), (, ( и ). Функция непрерывна на каждом из них. Определим знак функции в любой точке каждого из этих интервалов (рис. 3).

Следовательно, множество всех решений неравенства (4), а значит, и равносильного ему неравенства (3), есть объединение интервалов (; ), ( и чисел *x*1 = и *x*2 = .

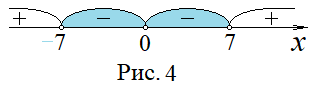
**Ответ.** [; ) [.

**4.** Решите неравенство:

(7)

**Решение.** Область существования функции *f* (*x*) = , множество *M*, состоит из всех *x*, одновременно удовлетворяющих условиям: ≥ 0, ≠ *–*7, и ≠0, т. е. множество *M* состоит из чисел 2π*k*, где *k* — любое целое число, кроме 0. Так как числа 0 и 7 не принадлежат множеству *M* и ≠ 0, то у функции *f* (*x*) нет нулей. Остаётся проверить, в каких точках множества *M* дробь принимает отрицательные значения. Для этого решим неравенство

< 0. (8)

Неравенство (8) имеет множество решений (–7; 0) (0; 7) (рис. 4).

Этому множеству решений принадлежат лишь два числа –2π и 2π из множества *M*. Только они и являются решениями неравенства (7).

**Ответ.** –2π и 2π.

Выражаю благодарность учителю математики М.Г. Назарову за помощь в подготовке материала к публикации.

А.В. Шевкин,

[avshevkin@mail.ru](mailto:avshevkin@mail.ru)

10.06.2017

1. Подробнее см. п. 12.3 из учебника «Алгебра и начала математического анализа, 11 класс» (С. М. Никольский и др.). [↑](#footnote-ref-1)