**Иррациональные уравнения – «на лицо ужасные, добрые внутри**

 *А. В. Шевкин, avshevkin@mail.ru*

Учащиеся иногда сталкиваются с непривычными иррациональными уравнениями, содержащими корни степени выше второй. В этом случае полезно помнить, то эти уравнения могут оказаться «на лицо ужасными, но добрыми внутри» — как люди-дикари с «Острова Невезения». Рассмотрим пример.

**1.** Решите уравнение:

$\sqrt[4]{13x-39}+1,23x=\sqrt[4]{78-26x}+3,69$. (1)

Прежде всего не надо пугаться или пытаться возводить уравнение во вторую или четвёртую степень. Сложный вид уравнения и перспектива получить уравнение четвёртой степени намекают на то, что оно может быть решено каким-то простым способом.

Найдём множество *M*, которому принадлежат корни уравнения (1). Это множество иногда называют областью определения уравнения (ООУ) — сложновато, но терпимо по сравнению с областью определения неравенства (ООН – это ещё и Организация объединённых наций). Ещё это множество называют и областью допустимых значений (ОДЗ) неизвестного (переменной) *x*.

Подкоренные выражения корней чётной степени неотрицательны, поэтому неравенства $13x-39$ ≥ 0 и $78-26x$ ≥ 0 должны выполняться одновременно. Эти неравенства имеют единственное общее решение 3, *M* = {3}. Остаётся проверить, является ли 3 корнем уравнения (1):

$\sqrt[4]{13∙3-39}+1,23∙3=\sqrt[4]{78-26∙3}+3,69$ (И),

следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень 3.

**Ответ.** 3.

Рассмотрим чуть более сложный пример.

**2.** Решите уравнение:

$\sqrt[6]{x^{2}-36}-6x=\sqrt[6]{36-x^{2}}+36$. (2)

Подкоренные выражения корней чётной степени неотрицательны, поэтому неравенства $x^{2}-36$ ≥ 0 и $36-x^{2}$ ≥ 0 должны выполняться одновременно. Эти неравенства имеют два общих решения –6 и 6,
*M* = {–6; 6}. Остаётся проверить, являются ли числа –6 и 6 корнями уравнения (2).

Если *x* = –6, то

$\sqrt[6]{(-6)^{2}-36}-6∙(-6)=\sqrt[6]{36-(-6)^{2}}+36$ (И),

Если *x* = 6, то

 $\sqrt[6]{6^{2}-36}-6∙6=\sqrt[6]{36-6^{2}}+36$ (Л),

следовательно, уравнение (2) имеет единственный корень –6.

**Ответ.** –6.

А теперь рассмотрим пример посложнее.

**3.** Решите уравнение:

$\sqrt{x-3}+4=\sqrt{25-x^{2}}$. (3)

Подкоренные выражения корней чётной степени неотрицательны, поэтому неравенства *x*$ -3$ ≥ 0 и $25-x^{2}$ ≥ 0 должны выполняться одновременно. Эти неравенства имеют решениями все числа из отрезка [3; 5], *M* = [3; 5].

Если *x* = 3, то $\sqrt{3-3}+4=\sqrt{25-3^{2}}$ (И), следовательно, один корень уравнения (3) найден, это число 3. Проверить тем же способом, являются ли все числа множества *M* корнями уравнения (3) не представляется возможным. Нужен иной метод. Оценим значения левой и правой частей уравнения при *x* > 3.

Если *x* > 3, то $\sqrt{x-3}+4>4$, а $\sqrt{25-x^{2}}<4$.

Следовательно, равенство (3) не выполняется ни при каком значении *x* > 3, то есть уравнение (3) имеет единственный корень 3.

**Ответ.** 3.

Интересно взглянуть на отбор корней уравнения (3) графическим способом. Он более громоздкий для данного уравнения, но может оказаться предпочтительным в том случае, если не удаётся такая простая оценка значений правой и левой частей уравнения, как в задании **3**.

Построим графики двух функций, координаты всех точек которых удовлетворяют условиям 3 ≤ *x* ≤ 5, *y* ≥ 0:

 *f* (*x*) $=\sqrt{x-3}$ + 4 и *g* (*x*)$ =\sqrt{25-x^{2}}$.

1) График функции *f* (*x*) получим переносом графика функции
*y*$ =\sqrt{x}$ на 3 единицы вправо и на 4 единицы вверх.

2) График *g* (*x*)$ =\sqrt{25-x^{2}}$ — часть окружности $x^{2}$+$ y^{2}=25$,

Изобразим эти графики в системе координат *xOy* с учётом ограничений на *x* и *y*.



Графики функций на множестве *M* имеют единственную общую точку (3; 4), на этом множестве функция *f* (*x*) возрастает, а функция *g* (*x*) убывает, поэтому других точек пересечения эти графики не имеют, значит, уравнение (3) имеет единственный корень 3.

Если же возвести уравнение (3) в квадрат, то после уединения корня в одной части уравнения, получим:

$-x^{2}-x+12=$ 8$\sqrt{x-3}$. (4)

Дальнейшее возведение в квадрат приведёт к уравнению четвёртой степени. Чтобы этого избежать, уравнение (4) надо решить графически.

Мы обсудили разные способы решения уравнения (3). Для данного уравнения первый способ оказался проще, а в любой письменной работе надо выбирать тот способ, которым учащиеся лучше владеют. С учётом возможной экономии сил и времени.