**Задачи про центроиды треугольников и тетраэдров**

А.В. Шевкин, avshevkin@mail.ru

В данной заметке речь идёт о векторах, центрах масс или центроидах (точках пересечения медиан) треугольников и центроидах (центрах масс тетраэдров). Начинаем с простых планиметрических задач, методы решения которых подскажут методы решения стерео-метрических задач.

**1.** Дан треугольник *ABC*, *AM* — его медиана. Докажите, что

.

Достроив треугольник *ABC* до параллелограмма *ABDC*, имеем:

,

что и требовалось доказать.

**2.** Дан треугольник *ABC*, *M* — точка пересечения его медиан. Докажите, что:

а) ;

б) .

Пусть *AN* — медиана треугольника *ABC*, тогда из свойства медиан треугольника и из результата задачи **1** следует, что

, а ,

следовательно,

Аналогично получим:

 ,

Сложив три последних равенства, получим:

,

так как сумма в скобках содержит три пары противоположных векторов.

Равенство а) доказано; равенство б) получите самостоятельно.

**3.** Дан треугольник *ABC*, *M* — точка пересечения его медиан,
*O* — произвольная точка плоскости. Докажите, что

.

Выразим вектор тремя способами:

 ,

 .

Сложив три полученных равенства и заменив на , получим:

,

откуда и следует истинность доказываемого равенства.

**4.** Даны центры масс *M* и треугольников *ABC* и . Докажите, что .

Пусть *O* — произвольная точка плоскости. Используя результат задачи **3**, запишем два равенства:

.

.

Теперь запишем вектор в виде разности:

,

что и требовалось доказать.

А теперь «выходим» в пространство. Решения двух задач по записи повторят два предыдущие решения.

**5.** Дан треугольник *ABC*, *M* — точка пересечения его медиан,
*O* — произвольная точка **пространства**. Докажите, что

.

**6.** Даны центры масс *M* и треугольников *ABC* и , **не лежащих в одной плоскости.** Докажите, что

.

**Медианой тетраэдра** называют отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с центром масс противолежащей грани.

**7.** Докажите, что медианы тетраэдра *ABCD* пересекаются в одной точке, называемой центром масс тетраэдра, и делятся этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины.

а) Докажем сначала, что две его медианы и пересекаются и делятся точкой пересечения в отношении 3 : 1, считая от вершины.

Пусть *M* — середина ребра *BC*. Центры тяжести и треугольников *ABC* и *BCD* лежат в плоскости *ADM*, поэтому медианы тетраэдра и пересекаются (точки *D* и *M* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой ). Пусть *G* — точка их пересечения.

Из подобия треугольников *MAD* и и свойства медиан треугольников следует, что *AD* : = 3 : 1.

Из подобия треугольников *AGD* и *G* следует, что

*AG* : *G* *DG* : *G*3 : 1.

Итак, четыре медианы тетраэдра *ABCD* пересекаются в точке *G* и делятся этой точкой в отношении 3 : 1, считая от вершины. Точка *G* является центроидом тетраэдра *ABCD*.

**8.** Пусть *G* — центроид тетраэдра *ABCD*. Докажите, что:

а) ; б) .

Пользуясь результатами задач **5** и **7**, запишем равенства:

,

,

,

.

Сложив эти равенства, получим: , что и требовалось доказать.

Равенство б) докажите самостоятельно.

**9.** Пусть *G* — центроид тетраэдра *ABCD*, — центроид тетраэдра . Докажите, что:

.

Пусть *O* — произвольная точка пространства. Запишем вектор в виде разности: . Так как

, то

, так как .

Аналогично

.

Тогда 4 , что и требовалось доказать.