**Задачи на переливания, или
Алгоритм перебора всех случаев**

А.В. Шевкин, avshevkin@mail.ru

В последнем сборнике для подготовки к ЕГЭ [1] появилась новая задача 19 на переливания. Поскольку переливаниями я занимался, делая книгу «Задачи на смекалку» для 5-6 классов (в соавторстве с И.Ф. Шарыгиным), то мне показалось интересным придумать алгоритм решения таких задач, исключающий пропуск вариантов, повторные переливания и циклы. Не хотелось бы, чтобы учащиеся на экзамене занимались «переливанием из пустого в порожнее». Начнём с подготовительной задачи.

**ЗАДАЧА 1.** Имеется три ведра объёмом 2 л, 4 л и 6 л. В двух первых их которых налита вода до верху, а третье ведро пустое. За одно переливание можно перелить воду из одного ведра в другое. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится (на вёдрах нет делений). Выливать воду из вёдер (не в ведро) или брать воду из какого-либо источника запрещается.

а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну?

б) Укажите все возможные способы наполнения вёдер.

в) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

**Решение.** Результаты переливаний будем записывать в виде троек чисел (в задачах с двузначными объёмами вёдер числа надо писать через запятую). Исходное состояние описывается тройкой чисел 240, что означает 2 л в 1-м ведре (двухлитровом), 4 литра во 2-м ведре (четырёхлитровом), 0 л в 3-м ведре (шестилитровом). Каждое переливание проводим по следующему алгоритму, пропуская невозможные шаги:

1) из 1-го во 2-й; 2) из 1-го во 3-й;

3) из 2-го во 1-й; 4) из 2-го во 3-й;

5) из 3-го во 1-й;    6) из 3-го во 2-й.

Алгоритм завершается после *n*-го шага, если после него не получено ни одного нового варианта переливания.

Если получен утвердительный ответ на вопрос «Можно ли получить…?», то завершать алгоритм нет необходимости.

Для доказательства того, что ответ на вопрос «Можно ли получить…?» отрицательный, алгоритм надо довести до конца.

Результаты переливания запишем в таблицу.

|  |  |
| --- | --- |
| Переливание | 240 |
| 1 | 042 | 204 |
| 2 | **222** | 006   ~~240~~ | 024 | ~~006~~ ~~240~~ |
| 3 | ~~042~~  ~~024~~  ~~204~~  ~~240~~ |  ~~204~~  ~~042~~   | ~~204~~ ~~006~~  ~~222~~  ~~042~~  |  |

Первое переливание даёт лишь два способа наполнения вёдер: 042 и 204.

Второе переливание даёт лишь три новых способа наполнения вёдер, повторы вариантов заполнения с полученными ранее — в таблице они в строках выше или в той же строке слева — зачёркнуты.

Третье переливание не даёт ни одного нового способа наполнения вёдер, на этом алгоритм завершён.

Теперь ответим на вопросы задачи.

а) Разлить воду в три ведра поровну можно. Вариант переливаний:

240 – 042 – 222.

б) Все возможные способы наполнения вёдер есть в таблице, выпишем их: 240, 042, 204, 222, 006, 024.

в) Разлить воду в два ведра поровну нельзя, так как единственный вариант 033 получить невозможно.

Есть и второе объяснение. Так как объёмы вёдер выражены чётными числами, то в результате любого переливания из исходных чётных чисел сложением или вычитанием невозможно получить нечётное число 3.

**ОТВЕТ:** а) да: 240 – 042 – 222; б) 240, 042, 204, 222, 006, 024; в) нет.

**ЗАДАЧА 2.** Имеется три ведра объёмом 2 л, 4 л и 5 л. В двух первых их которых налита вода до верху, а третье ведро пустое. За одно переливание можно перелить воду из одного ведра в другое. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер или брать воду из какого-либо источника запрещается.

а) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в три ведра поровну?

б) Можно ли через несколько переливаний разлить воду в два ведра поровну?

**Решение.** Применим описанный выше алгоритм переливаний для трёх вёдер, результаты переливаний запишем в таблицу.

|  |  |
| --- | --- |
| Переливание | 240 |
| 1 | 042 | 204 |
| 2 | **222** | 015   ~~240~~ | 024 | 105 ~~240~~ |
| 3 | ~~042~~  ~~024~~ ~~204~~  ~~240~~ | ~~105~~ 213 ~~042~~ | ~~204~~ ~~015~~ ~~222~~ ~~042~~ | ~~015~~ ~~204~~ 141 |
| 4 |  | **033**… |  | … |

а) После двух переливаний 240 – 042 – 222 получаем ответ на вопрос задачи: да.

б) Выполнив четыре переливания 240 – 042 – 015 – 213 – 033, получаем ответ на вопрос задачи: да.

**ОТВЕТ:** а) да: 240 – 042 – 222; б) да: 240 – 042 – 015 –213 – 033.

**ЗАДАЧА 3.** У Бори нет источника воды, но есть три ведра различных объёмов, в двух их которых есть вода. За один шаг Боря переливает воду из ведра, в котором она есть, в другое ведро. Переливание заканчивается в тот момент, когда или первое ведро опустеет, или второе ведро заполнится. Выливать воду из вёдер запрещается.

а) Мог ли Боря через несколько шагов получить в одном из вёдер ровно 2 л воды, если сначала у него были ведра объёмами 4 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 8 л?

б) Мог ли Боря через несколько шагов получить равные объёмы воды во всех ведрах, если сначала у него были ведра объёмами 5 л и 7 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом 10 л?

в) Сначала у Боря были ведра объёмами 3 л и 6 л, полные воды, а также пустое ведро объёмом *n* л. Какое наибольшее натуральное значение может принимать *n*, если известно, что как бы ни старался Боря, он не сможет получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер? [1]

**Решение.** а) Применим описанный выше алгоритм переливаний для трёх вёдер, результаты переливаний запишем в таблицу.

|  |  |
| --- | --- |
| Перелив. | 470 |
| 1 | 074 | 407 |
| 2 | 434 | 038   ~~470~~ | 047 | 308 ~~470~~ |
| 3 | ~~074~~  ~~038~~ ~~407~~  ~~470~~ | ~~308~~ ~~434~~ ~~074~~ | ~~407~~ ~~038~~ 443 ~~074~~ | ~~038~~ ~~407~~ 371 |
| 4 |  |  | 173 ~~047~~ ~~407~~ ~~470~~ | ~~074~~ 461 ~~308~~ ~~470~~ |
| 5 |  |  | ~~074~~ ~~443~~ **128** ~~470~~ | ~~371~~ 065 ~~407~~ ~~470~~ |
| 6 |  |  | … | **425** … |

Получить 2 л воды в одном ведре можно, выполнив пять переливаний:

470 – 407 – 047 – 443 – 173 – 128,

или шесть переливаний:

470 – 407 – 308 – 371 – 461 – 065 – 425.

Завершать алгоритм нет необходимости, так как ответ на вопрос уже получен. Ответ на вопрос: да.

В сборнике [1] ответ приведён для семи переливаний:

470 – 074 – 038 – 308 – 371 – 461 – 065 – 425.

Следование предложенному алгоритму позволяет получить тот же результат за меньшее число шагов.

б) У Бори было 12 л воды, получить в трёх вёдрах по 4 л воды он не мог, так как такой результат нельзя получить в соответствии с условиями задачи. Каждый результат переливания должен давать хотя бы одно пустое или одно полное ведро, а этого нет в результате 444. Ответ на вопрос: нет.

в) Выполним алгоритм переливаний для *n* = 9.

|  |  |
| --- | --- |
| Перелив. | 360 |
| 1 | 063 | 306 |
| 2 | 333 | 009  ~~360~~ | 036 | ~~009~~ ~~360~~ |
| 3 | ~~063~~  ~~036~~  ~~306~~  ~~360~~ | ~~306~~ ~~063~~ | ~~306~~  ~~009~~  ~~333~~ ~~063~~ |  |

Получить 4 л воды в одном ведре невозможно, так как алгоритм переливаний завершен и 4 л не появилось ни в одном ведре. Кроме того, переливая объёмы, кратные 3, в вёдра, объёмы которых кратны 3, мы складываем и вычитаем числа, кратные 3, поэтому получить 4 л невозможно.

Если взять *n* > 9, то алгоритм переливаний полностью повторится, так как в третье ведро входит вся вода для любого *n* ≥ 9, в третье ведро невозможно налить более 9 л. Это означает, что для любого натурального
*n* ≥ 9 Боря **не сможет** получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер. Наибольшего натурального значения *n* не существует.

На вопрос «Какое наибольшее натуральное значение может принимать *n*, если известно, что как бы ни старался Боря, **он не сможет** получить через несколько шагов ровно 4 л воды в одном из вёдер?» мы получили отрицательный ответ: наибольшего натурального *n* не существует, так как Боря **не сможет** получить 4 л при *n* = 9, 10, 11,…

В сборнике [2] задача включена в 45 вариант. К ней дан ответ: *n* = 8 и приведены переливания, с помощью которых Боря **сможет** получить 4 л воды в одном ведре:

360 – 306 – 108 – 162 – 342,

и сделан вывод: «Этот пример показывает, что наибольшее натуральное значение может принимать *n* – это 8». Это очевидная ошибка в условии или в ответе задачи, требующая доработки.

Давайте выполним алгоритм переливаний для *n* = 8.

|  |  |
| --- | --- |
| Перелив. | 360 |
| 1 | 063 | 306 |
| 2 | 333   | 018  ~~360~~ | 036 | 108 ~~360~~ |
| 3 | ~~063~~ ~~036~~ ~~306~~ ~~360~~ | ~~108~~  315  ~~063~~ | ~~306~~  ~~018~~  ~~333~~ ~~063~~ | ~~018~~ ~~306~~ 162 |
| 4 |  | **045** … |  | … |

Получить 4 л воды в одном ведре можно за четыре переливания:

360 – 063 – 018 – 315 – 045.

**ОТВЕТ:** а) да: 470 – 407 – 047 – 443 – 173 – 128; б) нет; в) наибольшего натурального значения *n* не существует.

**======================================================**

**Литература**

**1. ЕГЭ 2019** : Математика. Профильный уровень. 36 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ и 800 заданий части 2 / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», издательство МЦНМО, 2019. – 239 с.

**2. ЕГЭ 2020** : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 231 с.

**P.S. 1)** Выражаю благодарность за помощь в редактировании материала П.М. Камаеву.

**2)** Задачи из данной статьи войдут в третью мою книгу серии «Трудные задачи ЕГЭ», посвящённую заданиям 19 на целые числа. Она обещает выйти в январе 2020 г.

**Обновление:** 28.11.2019. Добавлена информация по сборнике «ЕГЭ-2002».