**А.В. Шевкин**

**Задачи с параметром. От простого к сложному**

**Предисловие**

Задачи с параметрами считаются (и являются) сложными для учителей и учащихся. Их много в абитуриентской и ЕГЭ-литературе, а вот способы их решения иногда излишне кратки, а потому не всегда понятны для начинающих разбираться в теме. Мы не ставим себе целью навести строгую научную классификацию задач с параметрами и методов их решения или создать своеобразный учебник: теория, образцы решения, задания для самостоятельного решения. Оставим это занятие профессионалам в данной теме. Мы решаем более скромную задачу: на небольшом наборе задач, используемых в последние годы для подготовки к ЕГЭ, показать возможно больше разных подходов к их решению. При этом постараемся избежать ненужной краткости и непонятности.

Пойдём от простого — к сложному. Начнём с разбора решений простых задач, охватывающих разные идеи решений, затем рассмотрим более сложные задачи. Источники задач — сборники [1] – [3]. После каждой задачи указаны номера сборника и варианта. Например, [2-49] — сборник 2, вариант 49. Без указания таких номеров приведены задачи из других источников, в подборе которых принял участие учитель математики Назаров М.Г. Для большего тематического разнообразия и содействия повторению возможно большего числа изученных тем в книжку добавлены задачи, специально составленные для неё, они помечены звёздочкой [\*]. Среди них есть и простые задачи. Тексты задач приведены к единому стилю: мы пишем «найдите все значения параметра *a*» вместо «найдите все *a*». Применительно к уравнению с параметром мы говорим о корне уравнения, а не о решении уравнения, хотя такая терминология используется ЕГЭ-литературе и может встретиться на экзамене. Это связано с тем, что уравнение с неизвестным *x* и параметром *a* бывает удобно рассматривать как уравнение с двумя неизвестными, а пары чисел (*x*; *a*), обращающие уравнение в верное числовое равенство, как решения этих уравнений.

Подбирая задачи с параметром, старались избегать однотипных задач, разбирая решения их только в том случае, когда с их помощью можно показать разные способы решения или разную степень подробности обоснования решения. Для ориентирования в идеях решения задач с параметрами список задач разбит на части, заголовки которых раскрывают идею или приём решения, объект, с которым приходится работать впервые при решении следующих за заголовком задач. Эти идеи, приёмы и объекты могут встречаться в дальнейшем, но уже без упоминания.

**Перебор возможных вариантов, неравенство с модулями**

**1.** Найдите сумму всех натуральных значений *n*, при каждом из которых дробь является целым числом.

**Решение.** Разделив числитель дроби на знаменатель уголком или выполнив преобразования, получим, что = = *n* – 1 + , т. е. представим данную дробь в виде суммы целого выражения *n* – 1, принимающего целые значения при любом натуральном *n*, и дроби . Задача свелась к отысканию всех натуральных значений *n*, при каждом из которых число 2*n* – 1 является делителем числа 6. Несложным перебором всех случаев получаем: *n* = 1; 2. При каждом из этих значений *n* дробь является целым числом. Сумма найденных значений *n* равна 3.

**Ответ.** 3.

**2.** Найдите наибольшее целое значение параметра *k*, при котором решения неравенства

(1)

удовлетворяют условию .

**Решение.** Сначала заметим, что в неравенстве (1) можно уменьшить число модулей, заменив на и на :

. (2)

Неравенство (2) равносильно двойному неравенству:

,

. (3)

Левая часть неравенства (3) выполняется при любых значениях *x* и *k*, так как 0, а ≥ 0. Поэтому неравенство (3) равносильно двойным неравенствам:

Условия задачи будут выполнены, если мы найдем наибольшее целое *k*, для которого справедливы два неравенства:

и (4)

каждое из которых выполняется для *k* = 2 и не выполняется для *k* > 2.

Наибольшее целое *k*, для которого справедливы неравенства (4), а значит, выполнены условия задачи, есть 2.

**Ответ.** 2.

**Замена неизвестного. Переход к уравнению,   
«симметричному» относительно двух неизвестных**

**3.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет единственный корень. Найдите этот корень для каждого значения *a*. [\*]

**Решение.** Два множителя в левой части уравнения (1) содержат повторяющееся выражение *a – x*. Если в каждом множителе поменять местами *x* и *a – x*, то множители поменяются местами — уравнение не изменится. Выполнив замену неизвестного *y = a – x*, перепишем уравнение (1) в виде:

(2)

Будем рассматривать уравнение (2) как уравнение с двумя неизвестными. Если пара чисел (*x*0; *y*0) является решением уравнения (2), то и пара чисел   
(*y*0; *x*0) также является его решением, в силу «симметричности» этого уравнения относительно *x* и *y*. Уравнение (1) имеет единственный корень для некоторого значения параметра *a*, если уравнение (2) имеет единственное решение (*x*0; *y*0). Для этого пары чисел (*x*0; *y*0) и (*y*0; *x*0) должны совпадать, т. е. должно выполняться равенство *x*0 = *y*0. Если же *x*0 ≠ *y*0, то решение (*x*0; *y*0) уравнения (2) не единственное и уравнение (1) не имеет единственный корень.

Итак, число *x*0 должно быть корнем уравнения

(3)

Уравнение (3) имеет два различные корня *x* = 0, *x* = 1, им соответствуют решения (0; 0) и (1; 1) уравнения (2). В первом случае *a* = 0, во втором случае *a* = 2. Уравнение (1) имеет единственный корень: *x* = 0 при   
*a* = 0, *x* = 1 при *a* = 2.

**Ответ.** *x* = 0 при *a* = 0, *x* = 1 при *a* = 2.

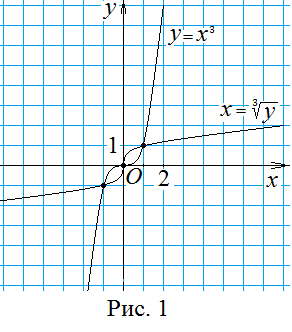
**4.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет единственный корень. Найдите этот корень для каждого значения *a*. [\*]

**Решение.** Выполнив замену неизвестного *y = a – x*, перепишем уравнение (1) в виде:

(2)

В координатной плоскости *xOy* изобразим все точки (*x*; *y*), координаты которых обращают уравнение (2) в верное числовое равенство. Получим графики функций и (рис. 1). Построенные графики пересекаются в точках (–1; –1), (0; 0) и (1; 1). Из формулы *y = a – x* получаем: *a* = –2, *a* = 0 и *a* = 2 соответственно. При других значениях параметра эта прямая пересекает графики в двух точках, поэтому уравнение (1) имеет два корня.

Следовательно, уравнение (1) имеет единст­венный корень: *x* = –1 при *a* = –2, *x* = 0 при *a* = 0,   
*x* = 1 при *a* = 2.

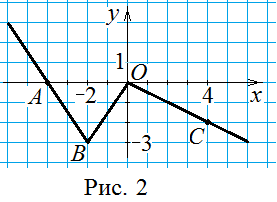
**Ответ.** *x* = –1 при *a* = –2, *x* = 0 при *a* = 0, *x* = 1 при *a* = 2.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**5.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

имеет единственный корень. Найдите этот корень для каждого значения *a*. [\*]

**===================================================**

**Функция с четырьмя параметрами**

**6.** Функция задана формулой

*kx* + *c*. (1)

Найдите значения *a*, *b*, *k* и *c* по её графику   
(рис. 2).

**Решение.** На каждом из промежутков функция является линейной, её уравнение определяется по координатам двух точек графика единственным образом. Выберем четыре точки: *A* (–4; 0),   
*В* (–2; –3), *O* (0; 0), *C* (4; –2) — по две на каждом из указанных промежутков. Подставив координаты этих четырёх точек поочерёдно в формулу (1), получим четыре уравнения:

2*a* + 4*b* – 4*k* + *c* = 0,

2*b* – 2*k* + *c* = –3,

2*a* + *c* = 0,

6*a* + 4*b* + 4*k* + *c* = –2.

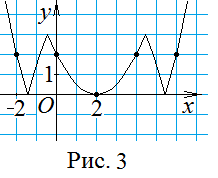
Решив систему из четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвест­ными, получим: *a* = 1,5, *b* = –1, *k* = –1, *c* = –3.

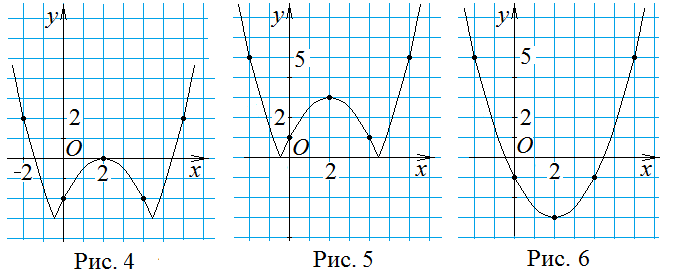
**Ответ.** *a* = 1,5, *b* = –1, *k* = –1, *c* = –3.

**7.** Функция задана формулой

(1)

Найдите значения *a*, *b*, *c* и *d* по её графику (рис. 3). [\*]

**Решение.** На рисунке 3 отмечены точки с целыми координатами, но, видимо, не стоит подставлять их координаты в равенство (1) и решать систему уравнений с модулями. Решение не будет таким простым, как в предыдущем задании. Проще «реконструи­ровать» процесс построения графика.

Если *a* > 0, то на рисунках 3 – 6 показано, как «обратным ходом» из данного графика (рис. 3) можно получить последний (рис. 6). Получите формулу *y* = самостоятельно.

Перепишем эту формулу так: *y* = (*a* = , *b* = –2, *c* = –1).

График функции *y* = изображён на рисунке 5.

График функции *y* = – 3 изображён на рисунке 4 (*d* = 3).

График функции *y* = изображён на рисунке 3.

Для *a* < 0 можно провести похожие рассуждения, только теперь надо считать, что последним шагомотражали относительно оси *Ox* другие части параболы. Тот же результат можно получить, заметив, что внутри первого модуля можно поменять знаки всех слагаемых: *y* = . Получим *a* = – , *b* = 2, *c* = 1, *d* = –3.

Число *a* не может быть равным нулю, так как в противном случае исходный график не парабола.

**Ответ.** *a* = , *b* = –2, *c* = –1, *d* = –3 или *a* = –, *b* = 2, *c* = 1, *d* = –3.

**Область определения функции, наибольшее значение функции**

**8.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых областью определения функции является множество всех действительных чисел.

**Решение.** Выполнив замену неизвестного *t* = 2*x*, *t* > 0, перепишем формулу, которой задана функция: . Областью определения исходной функции является множество всех действительных чисел, если функция , определенная на множестве всех положительных чисел, удовлетворяющих условию: .

Функция квадратичная, её график — парабола, вершина которой имеет абсциссу *t* = . Так как ветви параболы направлены вверх, то условия задачи будут выполнены, если . Решив неравенство, получим, что *a* < .

Если же , то условие 0 будет нарушено для положи­тельного корня уравнения = 0, т. е. для числа *t* = .

**Ответ.** *a* < .

**9.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых область определения функции содержит ровно пять целых чисел.

**Решение.** Логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел, поэтому справедливы три неравенства:

*x* > 0,     *a – x* > 0,      > 0.

Решив систему трёх неравенств, получим двойное неравенство   
0 < *x* < *a –* 1. Чтобы этот интервал содержал 5 целых чисел, должно выполняться двойное неравенство 5 < *a* – 1 ≤ 6. Следовательно, 6 < *a* ≤ 7.

**Ответ.** 6 < *a* ≤ 7.

**10.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых наибольшее значение функции не меньше 1. [2-11]

**Решение.** При любом раскрытии модуля функция задаётся формулой = , её наибольшее значение есть ордината вершины параболы.

Условия задачи будут выполнены, если или 1, или 1. Решив эти неравенства, получим: *a* ≤ –0,75 или *a* 0,75.

**Ответ.** *a* ≤ –0,75, *a* 0,75.

**Логарифмические уравнения и неравенства**

**11.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

= 2 (1)

имеет корень, больший 6. [\*]

**Решение.** По определению логарифма числа *a* > 0, *a* ≠ 1, – 7*x* + 10 = *a*2. Дискриминант квадратного уравнения *D* = 9 + 4*a*2 > 0 при любом значении *a*, то при любом значении параметра *a*, таком, что *a* > 0, *a* ≠ 1. Уравнение (1) имеет корни: *x*1 = < 2 и *x*2 = > 5. Чтобы ответить на вопрос задачи, нужно решить неравенство: > 6. Учитывая ограничения на *a*, получим, что *a* > 2.

**Ответ.** *a* > 2.

**12.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

= 2 (1)

имеет корень из интервала (0; 1). [\*]

**Решение.** Из определения логарифма числа следует, что

*x* + *a* > 0, *x* + *a* ≠ 1, – 7*x* + 10 = (*x* + *a*)2.

Перепишем полученное уравнение в виде:

(2*a* + 7)*x* = 10 – *a*2. (2)

Так как 2*a* + 7 ≠ 0, *a* ≠ –3,5 (в противном случае уравнение (2) не имеет корней), то уравнение (2) имеет единственный корень *x*1 = из интервала (0; 1) при каждом значении параметра, при котором *x*1 + *a* > 0, *x*1 + *a* ≠ 1,   
0 < *x*1 < 1. Следовательно, искомые значения *a* являются решениями системы:

(3)

Решив систему (3), получим, что 1 < *a* < .

**Ответ.** 1 < *a* < .

**13.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство

> 1 (1)

имеет хотя бы одно решение из отрезка [4; 5]. [\*]

**Решение.** По определению логарифма числа *a* > 0, *a* ≠ 1.

Если *a* > 1, то верно неравенство

> *a*,

– *a*) > 0. (2)

Все решения неравенства (2) составляют два интервала: и , где *x*1 = < 2, *x*2 = . Хотя бы одно число из отрезка [4; 5] содержится в интервале , если 5.

Решив неравенство < 5, получим, что *a* < 6, а так как *a* > 1, то окончательно имеем: 1 < *a* < 6.

Если 0 < *a* < 1, то верно двойное неравенство

0 < < *a*. (3)

Все решения неравенства (3) составляют два интервала: и . Хотя бы одно число из отрезка [4; 5] содержится в интервале (3; *x*2), если   
*x*2 > 4.

Решив неравенство > 4, получим, что *a* > 2, а так как 0 < *a* < 1, то в рассматриваемом случае не нашлось значений параметра, удовлетворяю­щего условиям задачи.

Итак, неравенство (1) содержит хотя бы одно число из отрезка [4; 5], если 1 < *a* < 6.

**Ответ.** 1 < *a* < 6.

**14.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых среди решений неравенства

> 0. (1)

не содержится число 2018. [\*]

**Решение.** Перепишем неравенство (1) в виде

. (2)

Из определения логарифма числа следует, что *x >* 2017, тогда основание логарифма больше 1 и неравенство (2) равносильно системе:

(3)

Решениями системы (2) являются все *x*, такие, что 2017 < *a* < *x*. Число 2018 не является решением неравенства (1), если *a* ≥ 2018.

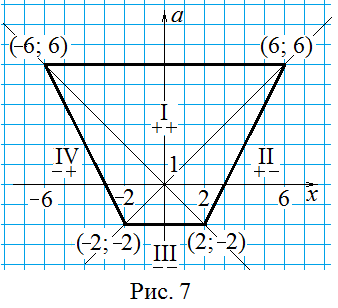
**Ответ.** *a* ≥ 2018.

**Раcкрытие модулей в областях координатной плоскости**

**15.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

|*a + x*| + |*a – x*| = *a* + 6 (1)

имеет бесконечно много корней. [\*]

**Решение.** Модули обращаются в нуль при *a* = –*x* и при *a* = *x*. В координатной плоскости *xOa* построим прямые *a* = –*x* и *a* = *x*, они разбивают координатную плоскость на 4 области: I, II, III, IV (рис. 7). Рассмотрим четыре возможности раскрыть модули в уравнении (1).

В области I верны равенства |*a + x*| = *a + x*,   
|*a – x*| = *a – x*. Уравнение (1) имеет вид   
*a* = 6.Области I принадлежит отрезок этой прямой с концами (–6; 6) и (6; 6).

В области II верны равенства |*a + x*| = *a + x*, |*a – x*| = –*a + x.* Уравнение (1) имеет вид   
*a =* 2*x –* 6. Области II принадлежит отрезок этой прямой с концами (2; –2) и (6; 6).

В области III верны равенства |*a + x*| = –*a – x*, |*a – x*| = –*a + x*. Уравнение (1) имеет вид *a* = –2.Области III принадлежит отрезок прямой *a* = –2 с концами (–2; –2) и (2; –2).

В области IV верны равенства |*a + x*| = –*a – x*, |*a – x*| = *a – x*, уравнение (1) имеет вид *a* = –2*x* – 6. Области IV принадлежит отрезок этой прямой с концами (–6; 6) и (–2; –2).

Уравнение (1) имеет бесконечно много корней при *a = –*2 и *a =* 6. При   
*a < –*2 или *a >* 6 оно не имеет корней, при –2 *<* *a <* 6 имеет ровно два корня.

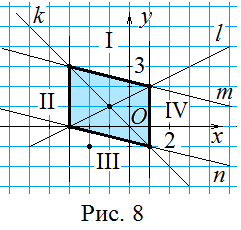
**Ответ.** *a = –*2, *a =* 6.

*Замечание.* Для раскрытия модулей можно брать любую точку (*x*; *a*), принадлежащую области. Например, в области I возьмём точку (0; 5). Для неё *a* + *x* > 0, *a – x* > 0, оба модуля раскрываем со знаком «+».

**16.** Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых прямая   
*y* = *a*(*x +* 2) – 1 делит пополам периметр фигуры, заданной неравенством

2|*x + y*| + |*x –* 2*y* + 3| ≤ 6. (1)

**Решение.** Сначала построим фигуру, состоящую из точек (*x*; *y*), координаты которых удовлетворяют неравенству (1).

В координатной плоскости *xOy* строим прямые   
*y* = –*x* (*k*) и *y* = (*l*), они разбивают координатную плоскость на четыре области: I, II, III, IV (рис. 8).

В области I верны равенства |*x + y*| = *x + y*,   
|*x –* 2*y* + 3| = –*x +* 2*y* – 3 неравенство (1) имеет вид Строим прямую (*m*). Области I принадлежит треугольник, ограниченный прямыми *k*, *l*, *m*

В области II верны равенства |*x + y*| = –*x – y*, |*x –* 2*y* + 3| = –*x +* 2*y* – 3 неравенство (1) имеет вид Строим прямую *x* = –3 Области II принадлежит треугольник, ограниченный прямыми *k*, *l*, *x* = –3

В области III верны равенства |*x + y*| = –*x – y*, |*x –* 2*y* + 3| = *x –* 2*y* + 3 неравенство (1) имеет вид Строим прямую (*n*). Области III принадлежит треугольник, ограниченный прямыми *k*, *l*, *n*.

В области IV верны равенства |*x + y*| = *x + y*, |*x –* 2*y* + 3| = *x –* 2*y* + 3 неравенство (1) имеет вид *x* 1. Строим прямую *x* = 1 Области IV принадлежит треугольник, ограниченный прямыми *k*, *l*, *x* = 1

Таким образом, неравенство (1) задаёт в координатной плоскости *xOy* параллелограмм с центром в точке (–1; 1) пересечения прямых *k* и *l*.

Прямая *y* = *a*(*x +* 2) – 1 при любом *a* проходит через точку (–2; –1), чтобы она делила периметр параллелограмма пополам, она должна пройти и через точку (–1; 1) — центр параллелограмма и его центр симметрии. Через эти точки проходит прямая *y* = 2*x* + 3, следовательно, *a* = 2.

**Ответ.** *a* = 2.

**Равносильность уравнений, равносильность уравнения системе**

**17.** Решите уравнение

(1)

при каждом значении параметра *a*. [\*]

**Решение.** *I способ.* Перепишем уравнение (1) в виде

(2)

Если существует пара чисел (*x*; *a*), для которой выполняется равенство (2), то справедливо неравенство

(3)

Для таких пар чисел обе части уравнения (2) неотрицательны. Возведём уравнение (2) в квадрат, получим уравнение

(4)

равносильное уравнению (2) на множестве всех пар чисел (*x*; *a*), для каждой из которых выполняется неравенство (3). Упростив уравнение (4), получим уравнение

. (5)

Если существует корень уравнения (5), то ≥ 0 и *a* = 0. Учитывая неравенство (3), имеем: 0

Таким образом, уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) имеют корни *x*, такие, что 0 2 лишь при *a* = 0, при *a* ≠ 0 они не имеют корней.

*II способ.* Пусть точка *M* (*x*; *a*) координатной плоскости *xOa* соответ­ствует решению (*x*; *a*) уравнения (1). Рассмотрим точки *O* (0; 0) и *N* (2; 0). Тогда *OM* = *MN* = , *ON* = 2 и равенство (1) означает, что *OM* + *MN* = *ON*, а это возможно лишь при условии, что точка *M* принадлежитотрезку *ON*. Но тогда *a* = 0 и 0 При других значениях *a* уравнение (1) не имеет корней.

**Ответ.** 0 2 при *a* = 0, при *a* ≠ 0 корней нет.

**18.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет ровно три корня.

**Решение.** Уравнение (1) равносильно системе:

(2)

Уравнение системы можно записать в виде

(3)

Уравнение (3) имеет ровно три корня *x*1 = 0, *x*2 = –2*a*, *x*3 = 4, если выполнены условия: *a* ≠ 0, *a* ≠ –2.

Корни *x*1, *x*2, *x*3 удовлетворяют неравенствам системы (2), если –8*a* 0, т. е. если *a* Учитывая условия *a* ≠ 0, *a* ≠ –2, окончательно имеем:   
.

**Ответ.** .

**19.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23]. [2-14]

**Решение.** Уравнение (1) имеет корни лишь при условии Заметим, что ( – () = , т. е. уравнение имеет вид |*m*| + |*n*| = *m* – *n*. Последнее равенство выполняется лишь при одновременном выполнении условий: *m* ≥ 0 и *n* ≤ 0. Следовательно, при каждом значении *a* уравнение (1) равносильно системе

Итак, для каждого значения параметра *a*, для которого существует корень уравнения (1), этот корень должен удовлетворять двойному неравенству:

.

Уравнение (1) имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], если

. (2)

Решив систему неравенств (2), получим два промежутка решений этой системы: [–3; –2] и [4; 7]. Все числа второго промежутка удовлетворяют условию 2*a* – 5 0, а все числа первого — нет. Следовательно, уравнение (1) имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], если 4 *a* 7.

**Ответ.** 4 *a* 7.

**Графический способ решения уравнения, неравенства**

**20.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет три корня.

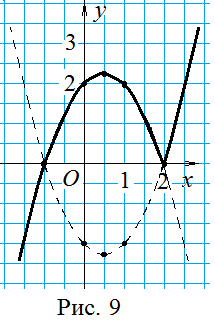
**Решение.** В координатной плоскости *xOy* построим график функции   
*y* = . Уравнение (1) имеет три корня, если график этой функции пересекает прямую *y* = в трёх точках.

Если *x* ≥ 2, то *y* = , график — часть параболы с вершиной (0,5; –2,25), выделенная жирной линией на рисунке 9.

Если *x* < 2, то *y* = , график — часть параболы с вершиной (0,5; 2,25), выделенная жирной линией. На рисунке 9 изображён график функции *y* = .

График функции *y* = — прямая, параллельная оси *Ox*. Так как ≥ 0, то рассмотрим все возможные случаи.

При = 0 графики функций *y* = и *y* = пересекаются в двух точках.

При 0 < < 2,25 графики функций пересекаются в трёх точках.

При = 2,25 графики функций пересекаются в двух точках.

При > 2,25 графики функций пересекаются в одной точке.

Уравнение (1) имеет три корня, если 0 < < 2,25, 0 < |*a*| < 1,5.

**Ответ.** –1,5 < *a* < 0; 0 < *a* < 1,5.

**21.** Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых неравенство

|*x* + 1| + 2|*x* + *а*| > 3 – 2*x*. (1)

выполняется для каждого значения *х*.

**Решение.**Перепишем неравенство в виде

|*x* + *а*| > 1,5 – *x –* 0,5|*x* + 1|. (2)

Рассмотрим функции *y* = 1,5 – *x –* 0,5|*x* + 1| и *y* = |*x* – (–*а*)|. Неравенство (1) выполняется для любого *x*, если для любого *x* точка графика первой функции ниже точки графика второй функции.

Построим график функции *y* = 1,5 – *x –* 0,5|*x* + 1|.

Для *x* ≥ –1 имеем: *y* = 1 – 1,5*x*, график — часть прямой, проходящей через точки (–1; 2,5) и (0; 1).

Для *x* < –1 имеем: *y* = 2 – 0,5*x*, график — часть прямой, проходящей через точки (–3; 3,5) и (–1; 2,5).

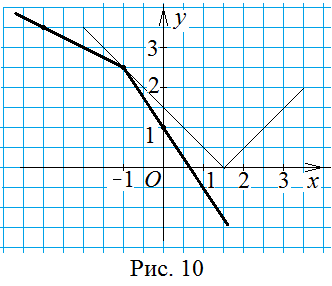
График функции *y* = 1,5 – *x –* 0,5|*x* + 1| изображён на рисунке 10 жирной линией.

График функции *y* = |*x* – (–*а*)| получается из графика функции *y* = |*x*| параллельным переносом вдоль оси *Ox* на |*а*| единиц: вправо при –*a* > 0 и влево при –*a* < 0.

Для –*a* = 1,5 график этой функции изображён на рисунке 10 тонкой линией. В этом случае графики имеют единственную общую точку (–1; 2,5), неравенство (1) не выполняется для *x* = –1.

Для каждого –*а* > 1,5, т. е. для *а* < –1,5 график функции *y* = |*x* – (–*а*)| смещается вправо. В этом случае неравенство (1) выполняется для любых *x*.

Для каждого –*а* < 1,5, т. е. для *а* > –1,5 график функции *y* = |*x* – (–*а*)| смещается влево. В этом случае неравенство (1) выполняется не для любых *x*.

**Ответ.** *a* < –1,5.

**В координатной плоскости *xOy* или *xOa*?**

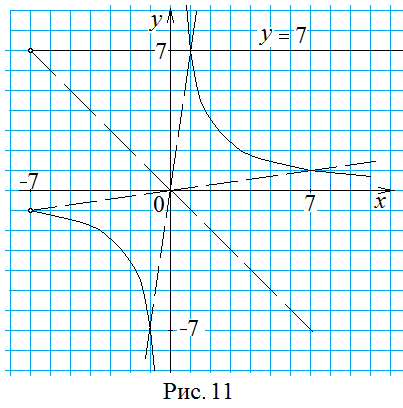
**22.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений

(1)

имеет ровно два решения. [3-4]

**Решение.** *I способ.* Система (1) равносильна системе

(2)

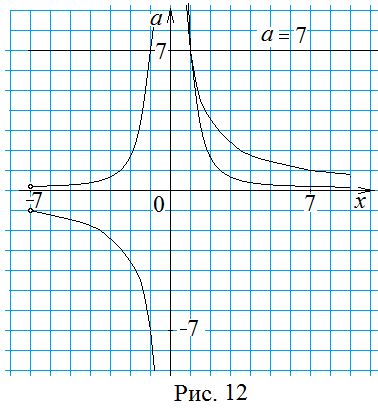
Изобразим в координатной плоскости *xOy* точки, координаты которых удовлет­воряют двум первым условиям системы (2). Получим часть гиперболы и часть прямой *y* = 7 для *x* > –7 (рис. 11).

Прямая *y* = *ax* не пересекает построен­ные графики, если –1 ≤ *a* ≤ 0.

Прямая *y* = *ax* пересекает построенные графики:

в одной точке, если *a* < –1,

в двух точках, если 0 < *a* ≤ или *a* = 7,

в трёх точках, если < *a* < или *a* > 7.

Система (1) имеет ровно два решения, если прямая *y* = *ax* пересекает построенные графики ровно в двух точках, т. е. лишь для 0 < *a* ≤ или *a* = 7.

*II способ.* Заменив *y* на *ax* в системе (1), получим систему:

(3)

Изобразим в координатной плоскости *xOa* точки, координаты которых удовлетво­ряют условиям системы (3). Получим часть гиперболы и часть графика чётной функции для *x* > –7 (рис. 12).

Построенные графики имеют общую точку (1; 7), поэтому система (3) при *a* = 7имеет два решения. Из-за ограничения *x* > –7 нет точек графика для 0 < *a* ≤ , поэтому для 0 < *a* ≤ система имеет 2 решения. В остальных случаях система (3) имеет или одно (*a* < –1), или три ( < *a* < 7, *a* > 7) решения, или не имеет решения (–1 ≤ *a* ≤ 0).

Следовательно, система (3) и система (1) имеют ровно два решения при   
0 < *a* ≤ , *a* = 7.

**Ответ.** 0 < *a* ≤ , *a* = 7.

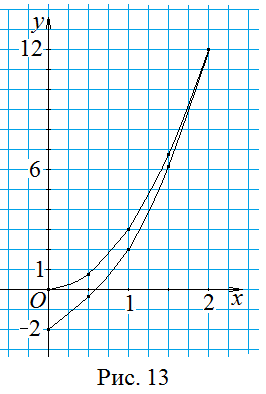
**23.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(1)

не имеет ни одного решения на интервале (0; 2). [1-28]

**Решение.** Перепишем уравнение, уединив параметр *a*:

(2)

*****I способ.* Функция *f* (*x*) = возрастает, как сумма возрастающих функций и . Поэтому наибольшее значение функции на отрезке   
[0; 2] равно *f* (2) = 12, а наименьшее — *f* (0) = –2. График функции *y* = *f* (*x*) изображён на рисунке 13.

Парабола *y* = проходит через точку (2; 12) при *a* = –3, поэтому она пересекает график функции   
*y* = *f* (*x*) на интервале (0; 2) при любом *a*, таком, что   
*a >* –3. Значит, парабола *y* = не пересекает график функции *y* = *f* (*x*) на интервале (0; 2) при любом значении *a*, таком, что *a* ≤ –3.

Следовательно, уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) не имеют ни одного решения на интервале (0; 2) при любом *a* ≤ –3.

*II способ.* На плоскости (*x*; *a*) изобразим множество точек, координаты которых при удовлетворяют уравнению (1). Так как *x* = 0 не корень уравнения (2), то это уравнение равносильно уравнению

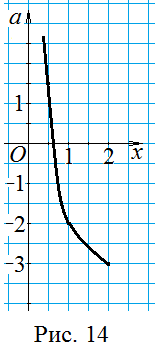
*a* = (3)

С помощью производной построим график функции *a* (*x*) = , непрерывной на промежутке (0; 2].

*a*'(*x*) = = .

Знак производной на интервале (0; 2) совпадает со знаком числителя дроби, т. е. со знаком функции

*g*(*x*) =

Функция *g*(*x*) на отрезке [0; 2] имеет единственную крити­ческую точку   
*x* = 1, а так как *g*(0) = –4, *g*(1) = –2, *g*(2) = –6, то наибольшее значение функции *g*(*x*) на интервале (0; 2) отрицательно и для любого *x* из этого интервала *g*(*x*) < 0, поэтому *a*'(*x*) < 0 для любого *x* из интервала (0; 2). Следовательно, функция *a*(*x*) убывает на промежутке , при этом её наименьшее значение здесь равно *a*(2) = –3. В окрестности точки *x* = 0 функция не ограничена, следовательно, множество её значений на промежутке (0; 2] — бесконечный промежуток . График функции изображён на рисунке 14.

Итак, уравнение (1) имеет корень *x* из интервала (0; 2) для каждого значения *a* из промежутка и не имеет корней для каждого *a* ≤ –3.

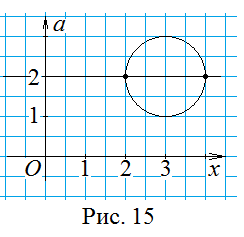
**Ответ.** *a* ≤ –3.

**Уравнение окружности. Угловой коэффициент прямой**

**24.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых модуль разности корней уравнения

(1)

принимает наибольшее значение. [2-29]

**Решение.** *I способ.* Перепишем уравнение (1) в виде:

. (2)

Получилось уравнение окружности с центром (3; 2) и радиусом 1 в координатной плоскости *xOa* (рис. 15). Каждому значению параметра *a* соответствует своя горизонтальная прямая. На рисунке 15 изображена прямая *a* = 2. При *a* = 2 прямая проходит через центр окружности и пересекает её в двух точках, абсциссы которых являются корнями уравнения (1). Модуль разности корней уравнения равен диаметру окружности 2 и не может быть больше при других значениях параметра *a*.

*II способ.* Вычислив дискриминант квадратного уравнения (1), получим, что Модуль разности корней квадрат­ного уравнения достигает наибольшего значения, если *D* (*a*) достигает наибольшего положительного значения, т. е. при *a* = 2. При этом *D* (2) > 0.

**Ответ.** *a* = 2.

**25.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

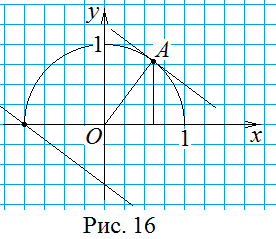
(1)

имеет хотя бы один корень. [\*]

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде:

. (2)

График функции *y* = — верхняя полуокружность окружности  
 *x*2 + *y*2 = 1. График функции *y* = — прямая (рис. 16). Она проходит через точку (–1; 0) при *a* = –3. Это наименьшее значение параметра, при котором прямая и полуокружность имеют общую точку.

Найдём наибольшее значение параметра, при котором прямая и полуокружность имеют общую точку. Оно соответствует касательной, имеющей с полуокружностью общую точку *A*. Прямая *OA* перпендикулярна касательной, она задаётся уравнением *y* = , поэтому *A* (; ). Подставив координаты точки *A* в уравнение прямой, получим искомое значение параметра: *a* = 5.

Итак, при –3 ≤ *a* ≤ 5 прямая и полуокружность имеют хотя бы одну общую точку, следовательно, уравнение (1) имеет хотя бы один корень.

**Ответ.** –3 ≤ *a* ≤ 5.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**26.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение имеет: а) ровно один корень; б) два корня. [\*]

**===================================================**

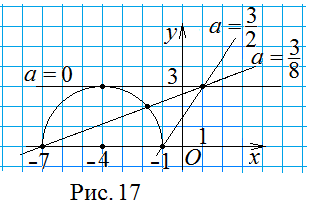
**27.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

(1)

имеет единственное решение. [3-16]

**Решение.** Функция определена и неотрицательна на отрезке [–7; –1]. Её график — половина окружности (рис. 17). В этом можно убедиться, возведя в квадрат первое уравнение системы и переписав полученное уравнение в виде , –7 ≤ *x* ≤ –1, 0.

При любом значении *a* графиком функции является прямая, проходящая через точку (1; 3) и не параллельная оси *Oy*. Для трёх значений *a* = 0, *a* = и *a* = прямые изображены на рисунке 17. Они проходят через точку (1; 3) и точки (–4; 3), (–7; 0) и (–1; 0) соответственно.

Система (1) имеет единственное решение, если графики функций

и

имеют единственную общую точку. Это возможно лишь при условии *a* = < *a* ≤ .

**Ответ.** *a* = , < *a* ≤ .

**28.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых система

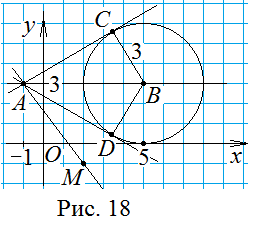
(1)

не имеет решений.

**Решение.** *I способ (геометрический).* Сначала изобразим в координатной плоскости *xOy* все точки (*x*; *y*), для которых верны равенства

и .

Получим окружность с центром *B* (5; 3) и радиусом 3 и точку *M* (2; –1) (рис. 18). Если к этим точкам добавить все точки внутри построенной окружности, то получим все точки для которых выполняется неравенство системы (1). Чтобы система не имела решений, требуется, чтобы прямая, заданная уравнением системы (1), не проходила через точку *M* и не имела общих точек с окружностью.

Прямая при любом значении параметра *a* проходит через точку *A* (–1; 3). Она не проходит точку *M* при *a* ≠ Эта прямая касается окружности в точках *C* и *D*, образуя углы 30 с прямой *AB*, так как *AB* = 6, *BC* = *BD* = 3 . Угловой коэффициент *a* прямой *AC* равен tg 30. Угловой коэффициент *a* прямой *AD* — равен –. Прямая не имеет общих точек с окружностью и не проходит через точку *M*, если *a* < , < *a* < , *a* > . Во всех этих случаях система (1) не имеет решений.

*II способ (алгебраический).* Подставив *ax + a* + 3 вместо *y* в первое неравенство системы (1), получим неравенство

. (2)

Так как из уравнения системы (1) значение *y* по *x* определяется единственным способом для каждого значения *a*, то система (1) не имеет решений, если неравенство (2) не имеет решений.

Второй множитель в левой части неравенства (2) неотрицателен. Исклю­чим случай, когда он равен нулю: *x* = 2, *a* = . В этом случае неравенство (2) имеет решение. В остальных случаях разделим на этот положительный множитель неравенство (2). Решим неравенство

≤ 0, (3)

равносильное неравенству (2) на множестве всех *x*, таких, что *x ≠* 2.

Перепишем неравенство (3) в виде:

≤ 0. (4)

Неравенство (4) квадратное с положительным первым коэффициентом, оно не имеет решений, если < 0. Решив это неравенство, получим . Так как *a* ≠ , то система (1) не имеет решений для всех *a*, таких, что .

**Ответ.** .

**Тригонометрические уравнения**

**29.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

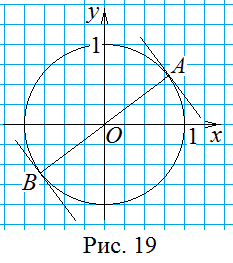
(1)

имеет хотя бы один корень. [\*]

**Решение.** *I способ.* Сначала решим задачу знакомым способом, выполнив замену неизвестных: *x* = , *y* = . Найдём все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений

(2)

имеет хотя бы одно решение.

В координатной плоскости *xOy* первое уравнение задаёт единичную окружность с центром (0; 0), второе — прямую *y* = *x* + (рис. 19). Проведём две касательные к окружности с угловым коэффициентом *k* = , получим точки касания *A* и *B*. Прямая *OA* перпендикулярна касательным, она задаётся уравнением *y* = , *A* (; ), *B*(; ). Подставив координаты точек *A* и *B* в уравнение прямой, получим границы для значений параметра: *a* = 5, *a* = –5.

Итак, система (2) имеет хотя бы одно решение, если –5 *a* 5. Следо­вательно, уравнение (1) имеет хотя бы один корень при тех же значениях *a*.

*II способ.* Введём вспомогательный угол, разделив уравнение (1) на число = 5. Перепишем уравнение (1) в виде:

(3)

Пусть угол α первой четверти, такой, что , перепишем уравнение (2) в виде:

,

. (4)

Так как 1, то , откуда получаем, что |*a*| 5.

**Ответ.** –5 ≤ *a* ≤ 5.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**30.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

имеет хотя бы один корень. [\*]

**===================================================**

**31.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет хотя бы один корень. [\*]

**Решение.** Пусть *t* = , где – ≤ *t* ≤ (см. предыдущее задание). Тогда = 1 + , откуда . Выполнив замену неизвест­ного, перепишем уравнение (1) в виде:

*a* = (2)

Функция (2) на отрезке принимает наименьшее значение в точке *t* = –1 (абсцисса вершины параболы), а наибольшее значение — на одном из концов отрезка :

При *t* = –1    *a* = –1, при *t* =     *a* = – , при *t* =     *a* = +

Функция (2) на отрезке принимает наименьшее значение –1, а наибольшее значение + . Следовательно, уравнение (1) имеет хотя бы один корень при –1 *a* + .

**Ответ.** –1 *a* + .

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**32.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень. [\*]

**===================================================**

*Замечание.* Замена неизвестного *t* = (*t* = ), выполняется в тригонометрическом уравнении, если в него входят выражения (или и ).

**33.** Найдите все значения параметра *k*, при каждом из которых уравнение

= 2 (1)

имеет хотя бы один корень на отрезке [0; ]. [2-47]

**Решение.** Так как sin *t* ≠ cos *t*, то будем искать значения параметра *k* для *t* из множества *M* = [0; ) (; ]. На множестве *M* уравнение (1) равносильно уравнению

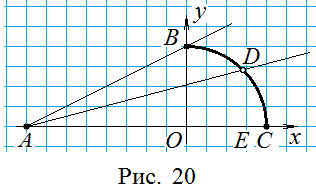
6*k* – 2 cos *t* + 3*k* cos *t* = 2 sin *t* – 2 cos *t*,

2 sin *t* – 3*k* cos *t* – 6*k* = 0. (2)

Пусть *x* = cos *t*, тогда *y* = sin *t* = . Для *t M* выполняются условия: 0 ≤ *x* ≤ 1, *x ≠* Перепишем уравнение (2) в виде:

2 – 3*k x* – 6*k* = 0,

= 1,5*k* (*x* + 2). (3)

Решим уравнение (3) графически. График функции *y* = при указанных выше ограничениях на *x* — это четверть нашей единичной окружности без точки *D*, а график функции   
*y* = 1,5*k* (*x* + 2) — прямая, проходящая через точку *A* (–2; 0) при каждом значении *k* (рис. 20).

Уравнение (1) имеет хотя бы один корень, если прямая проходит через точку дуги *BC*, но не через точку *D*.

Угловой коэффициент прямой *AC* равен 1,5*k* = 0 при *k* = 0. Угловой коэффициент прямой *AB* равен 1,5*k* = = при *k* = . Угловой коэффициент прямой *AD* равен 1,5*k* = = : при *k* = .

Итак, уравнение (1) имеет хотя бы один корень на отрезке [0; ], если   
*k*

**Ответ.** *k*

**34.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет хотя бы один корень. [\*]

**Решение.** Уравнение (1) однородное второй степени. Числа *x*, для которых = 0, не являются корнями уравнения (1). Разделим уравнение (1) на получим уравнение

, (2)

равносильное уравнению (1).

Уравнение (2) квадратное относительно , оно имеет корни, если  
 . Следовательно, уравнение (1) имеет хотя бы один корень, если *a* ≤ 25.

**Ответ.** *a* 25.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**35.** Найдите все значения параметра *k*, при каждом из которых уравнение = 2 имеет хотя бы один корень на отрезке [; ]. [2-32]

**===================================================**

**Квадратичная функция**

**36.** Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых множество решений неравенства

(1)

содержит отрезок . [2-40]

**Решение.** При любых значениях *a* и *x* знаменатель дроби в неравенстве (1) положительный, поэтому это неравенство равносильно неравенству

которое перепишем в виде:

(2)

Пусть *t* = cos *x*, *t* [0; 1] — в этом случае множество решений неравенства содержит отрезок . Рассмотрим квадратичную функцию

*f* (*t*) = . (3)

Для решения задачи требуется найти все значения *a*, при каждом из которых функция (3) отрицательна на отрезке [0; 1]. Для этого достаточно, чтобы данная функция принимала отрицательные значения на концах этого отрезка, т. е. выполнения неравенств: *f* (0) < 0 и *f* (1) < 0.

Решив систему неравенств

получим все искомые значения параметра: *a* <

**Ответ.** *a* <

**37.** Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых область значений функции содержит число 2. [1-17]

**Решение.** Пусть *t* = sin *x*, тогда, где [–1; 1]. Требуется найти все значения параметра *a*, для каждого из которых уравнение

= 2 (1)

имеет хотя бы один корень на отрезке [–1; 1].

Так как для любого *t*, то уравнение (1) равносильно уравнению

. (2)

Рассмотрим квадратичную функцию *f* (*t*) = на отрезке   
[–1; 1]. Для каждого значения *a* её график — парабола, абсцисса вершины которой *t*0 = принадлежит отрезку [–1; 1], *f* (*–*1) = *a* + 5, *f* (1) = *a* + 7. Остаётся найти все значения *a*, при каждом из которых *f* (*t*0) = ≤ 0, а большее из значений функции на концах отрезка — число *a* + 7 — неотри­цательно В этом случае квадратичная функция имеет нуль на отрезке [–1; 1], а равносильные уравнения (1) и (2) имеют корень на этом отрезке.

Решив систему неравенств

получим все искомые значения *a*: ≤ *a* ≤Все значения параметра *a*, для каждого из которых область значений функции содержит число 2, составляют промежуток ≤ *a* ≤

**Ответ.** ≤ *a* ≤.

**Метод интервалов решения неравенств**

**38.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство

(1)

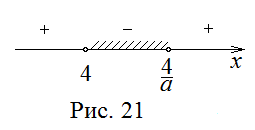
выполняется при любых *x* (1; 4). [\*]

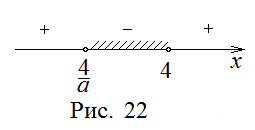
**Решение.** *I способ.* Если *a* = 0, то при *x* = 2 из интервала (1; 4) неравенство (1) не выполняется. Следовательно, *a* 0.

Если *a* > 0, то неравенство (1) равносильно неравенству

. (2)

а) Если = 4, то неравенство (2) не имеет решений.

б) Если > 4, т. е. если *a* < 1, то решения неравенства (2) составляют интервал (рис. 21). Ни при каких значениях *a* < 1 неравенство (1) не выполняется при любых *x* (1; 4).

в) Если < 4, то решения неравенства (2) составляют интервал (рис. 22). Неравенство (2) выполняется при любых *x* (1; 4), если , т. е. для всех *a* ≥ 4.

Если *a* < 0, то < 4 и неравенство (1) равносильно неравенству

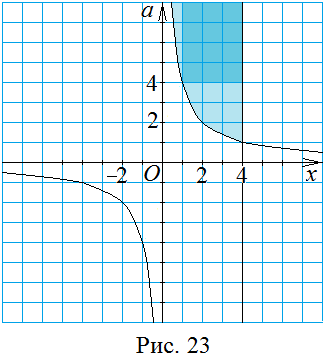
. (3)

Для числа 2 из интервала (1; 4) неравенство (3) не выполняется.

Следовательно, неравенство (1) выполняется при любых *x* (1; 4) лишь для *a* ≥ 4.

*II способ.* Рассмотрим пример наглядной проверки правильности полученных результатов. Изобразим в координатной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), *x ≠* 0, обращающие в нуль первый множитель в левой части неравенства

. (4)

Получим гиперболу *a* = . Все пары чисел (*x*; *a*), обращающие в нуль второй множитель в левой части неравенства (4), изображаются точками прямой *x* = 4. Координатная плоскость *xOa* разбита двумя графиками на шесть областей, в каждой из которых произведение имеет один и тот же знак для всех точек области. Нас интересуют лишь две области из шести в интервале значений 1 < *x* < 4. Область, в которой выполняется неравенство (4), выделена на рисунке 23 цветом. В более тёмной части этой области неравенство (4) выполняется для любого *x* из интервала (1; 4) при *a* 4.

**Ответ.** *a* 4.

**39.** Найдите сумму всех целых значений параметра *a*, при каждом из которых неравенство

(1)

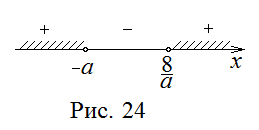
выполняется при любых *x* .

**Решение.** *I способ.* Заметим, что *a* ≠ 0, так как в противном случае при   
*x* = 5 из множества *M* = неравенство (1) не выполняется.

Неравенство (1) равносильно неравенству

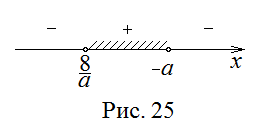
. (2)

Решим неравенство (2) методом интервалов для случаев *a* > 0 и *a* < 0.

а) Если *a* > 0, то –*a* < . Решения неравенства (2) составляют множество (рис. 24).

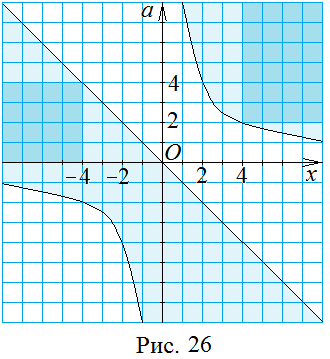
Любое число из множества *M* является решением неравенства (2), если число *a* является решением системы:

(3)

Все решения системы (3) составляют отрезок [2; 4], сумма целых чисел из этого отрезка равна 9.

б) Если *a* < 0, то < –*a*. Решения неравенства (2) составляют интервал (рис. 25).

Для любого значения *a* < 0 в множестве *M* найдётся число *x* = –2*a*, которое больше –*a* и не является решением неравенства (2), следовательно, любое   
*a* < 0 не удовлетворяет условиям задачи. Cумма целых значений параметра *a*, удовлетворяющих условиям задачи, равна 9.

*II способ.* Рассмотрим тот же способ наглядной проверки правильности полученных результатов. Изобразим в коорди­натной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), обращающие в нуль первый множитель в левой части неравенства

, (4)

равносильного неравенству (1), получим гипер­болу *a* = , и все пары чисел (*x*; *a*), обращающие в нуль второй множитель в левой части неравенства (4), получим прямую *a* = –*x*. Вся координатная плоскость разбита этими графиками на четыре области, в каждой из этих областей произведение имеет один и тот же знак для всех точек области. Области, в которых выполняется неравенство (4), выделены на рисунке 26 цветом. В более тёмных частях этих областей неравенство (4) выполняется для любого *x* из интервала — для *a* 2, для любого *x* из интервала — для 0 ≤ *a* ≤ 4. Для любого *x* из объединения этих интервалов неравенство (4) выполняется для 2 ≤ *a* ≤ 4. Сумма целых значений параметра *a* из этого отрезка равна 9.

**Ответ.** 9.

**Решение уравнения на промежутках**

**40.** Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых уравнение

(1)

имеет хотя бы один корень. [1-29]

**Решение.** Левая часть уравнения (1) неотрицательна, следовательно,   
*a* ≤ 2. Выполнив замену неизвестного *t* = , 4 ≤ *t* ≤7, перепишем уравнение (1) в виде

. (2)

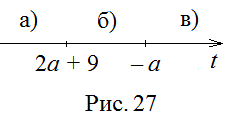
Остаётся найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение (2) имеет хотя бы один корень *t* из множества *M* = [4; 7].

1) Если –*a =* 2*a* + 9, т. е. если *a* = –3, то уравнение (2) имеет вид:

.

Это уравнение имеет корень 5,5, принадлежащий множеству *M*, следовательно, *a* = –3 удовлетворяет условиям задачи.

2) Если 2*a* + 9 < –*a*, т. е. если *a* < –3, то возможны три случая:   
*t <* 2*a* + 9, 2*a* + 9 *≤* *t* *<* –*a*, *t* *≥* –*a* (рис. 27).

а) Если *t* *<* 2*a* + 9, то *t* *<* 3, так как *a* < –3. Следовательно, в случае а) уравнение (2) не имеет корней в множестве *M*.

б) Если 2*a* + 9 *≤* *t* *<* –*a*, то уравнение (2) имеет вид:

.

Оно имеет корни лишь при *a* = (неравенство *a* < –3 выполнено). Эти корни удовлетворяют неравенству 2*a* + 9 *≤* *t* *<* –*a* при –2 *≤* *t* *<* , т. е. при   
*a* = в множестве *M* найдётся хотя бы один корень уравнения (2). Следовательно, *a* = удовлетворяет условиям задачи.

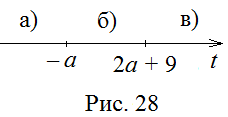
в) Если *t* *≥* –*a*, тоуравнение (2) имеет вид:

. (3)

Уравнение (3) имеет единственный корень *t* = , принадлежащий *M*. Неравенство *t* *≥* –*a* выполняется при всех *a ≥* *.* Следовательно, при всех *≤* *a* < –3 уравнение (2) имеет хотя бы один корень в множестве *M*.

В случае 2) условию задачи удовлетворяют все *a*,такие, что *≤* *a* < –3.

3) Если –*a* <2*a* + 9, т. е. если *a* *>* –3, то возможны три случая:   
*t <* –*a*, –*a* *≤* *t* *<* 2*a* + 9, *t* *≥* 2*a* + 9 (рис. 28).

а) Если *t* *<* –*a*, то *t* *<* 3, так как *a* > –3. Следовательно, в случае а) уравнение (2) не имеет корней в множестве *M*.

б) Если –*a* *≤* *t* *<* 2*a* + 9, то уравнение (2) имеет вид:

.

Оно имеет корни лишь при *a* = (неравенство *a* *>* –3 выполнено). Эти корни удовлетворяют неравенству –*a* *≤* *t* *<* 2*a* + 9 при *≤* *t* *<* , т. е. при   
*a* = в множестве *M* найдётся хотя бы один корень уравнения (2). Следовательно, *a* = удовлетворяет условиям задачи.

в) Если *t* *≥* 2*a* + 9, тоуравнение (2) имеет вид (3) и имеет тот же единственный корень *t* = . Неравенство *t* *≥* 2*a* + 9выполняется при всех *a*,таких, что –3 < *a* ≤ *.*

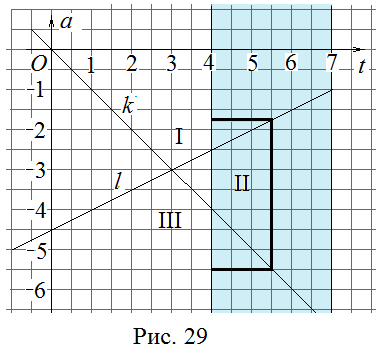
В случае 3) условию задачи удовлетворяют все *a*,такие, что –3 < *a ≤* .

Объединяя все значения *a*, удовлетворяющие условиям задачи в случаях 1), 2), 3), имеем: уравнение (1) имеет хотя бы один корень при всех   
 ≤ *a* ≤ (условие *a* ≤ 2 выполнено).

*II способ.* Используя ту же замену неизвестного *t* = , 4 ≤ *t* ≤7, перепишем уравнение (1) в виде

. (4)

Сначала построим фигуру, состоящую из точек (*t*; *a*), координаты которых удовлетворяют неравенству 4 ≤ *t* ≤7 и уравнению (4):

В координатной плоскости *tOa* построим прямые *a* = –*t* и *a* = — *k* и *l* соответственно (рис. 29), они разбивают координатную плоскость на 4 области, из которых в полосу значений 4 ≤ *t* ≤7 попадают только три: I, II, III. Рассмотрим три возмож­ности раскрыть модули в уравнении (4).

В области I , уравнение (4) имеет вид   
 Строим прямую . Области I и полосе значений *t* принадлежит отрезок с концами и

В области II |*t + a*| = *t + a*,, уравнение (4) имеет вид Строим прямую, заданную уравнением . Области II и полосе значений *t* принадлежит отрезок с концами

В области III , уравнение (4) имеет вид Строим прямую . Области III и полосе значений *t* принадлежит отрезок с концами

Таким образом, уравнению (4) удовлетворяют лишь пары чисел (*t*; *a*), для второй координаты которых выполняется неравенство ≤ *a* ≤. Следовательно, уравнение (1) имеет хотя бы один корень для любого значения параметра *a*, такого, что ≤ *a* ≤ (условие *a* ≤ 2 выполнено).

**Ответ.**  ≤ *a* ≤.

**Система уравнений с параметром**

**41.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

(1)

имеет ровно четыре решения. [1-30]

**Решение.** Прежде всего заметим, что при любом значении параметра *a* значение *z* определяется единственным образом:

*z* = .

Остаётся найти все значения параметра *a*, при каждом из которых система

имеет ровно четыре решения (*x*; *y*).

Перепишем систему в виде

(2)

Так как левые части уравнений системы неотрицательны, то для параметра *a* справедливы два неравенства

и

Решив систему этих неравенств, получим, что

≤ *a* ≤ 2.

Сделав замену, *u = x* – 3, *v = y* – 4, перепишем систему (2) в виде

(3)

Теперь осталось найти все значения параметра *a*, при каждом из которых система (3) имеет ровно четыре решения (*u*; *v*).

При *u* = 0 или *v* = 0 параметр *a* принимает значения 2 или –0,5, из которых лишь *a* = 2 удовлетворяет двойному неравенству (2).

При *a* = 2 система (3) имеет вид

Она имеет ровно четыре решения: (0; ), (0; –), (; 0), (–; 0). Следовательно, *a* = 2 удовлетворяет условиям задачи.

Пусть теперь *u* ≠ 0 и *v* ≠ 0. Тогда при каждом значении параметра *a* первое уравнение системы (3) задаёт пару гипербол *v* = , а второе уравнение — окружность. Система (3) будет иметь ровно четыре решения   
(*u*; *v*), если обе гиперболы касаются окружности в четырёх точках (*u*; *u*),   
(*u*; –*u*), (–*u*; *u*), (–*u*; –*u*). Иначе система (3) имеет восемь решений или не имеет решений. В каждом из четырёх случаев система имеет вид:

Это возможно лишь при условии = , т. е. только при *a* = 1,8 (условие (2) выполняется).

Следовательно, *a* = 1,8 также удовлетворяет условиям задачи.

Итак, существует два значения *a* = 1,8 и *a* = 2, для каждого из которых система (1) имеет ровно четыре решения.

**Ответ.** 1,8; 2.

**Свойство монотонной функции**

**42.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

8*x*6 + 4*x*2 = (3*x* + 5*a*)3 + 6*x* + 10*a* (1)

не имеет корней. [2-49]

**Решение.** Заметим, что в правой части уравнения (1) два раза встречается одно и то же выражение 3*x* + 5*a*. Для каждого значения *a* правая часть уравнения (1) есть значение функции *f*(*t*) = *t*3 + 2*t* при *t*1 = 3*x* + 5*a*. Левая часть — значение той же функции при *t*2 = 3*x*2.

Функция *f*(*t*) является возрастающей, как сумма возрастающих функций *t*3 и 2*t*. Воспользуемся свойством возрастающей функции: каждое своё значение она принимает только один раз, т. е.

*f*(*t*1) = *f*(*t*2) => *t*1 = *t*2.

А так как

*t*1 = *t*2 => *f*(*t*1) = *f*(*t*2),

то уравнения *f*(*t*1) = *f*(*t*2) и *t*1 = *t*2 равносильны.

Это означает, что уравнение (1) равносильно уравнению:

2*x*2 = 3*x* + 5*a*.

Остаётся найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение   
2*x*2 – 3*x* – 5*a* = 0 не имеет корней. Вычислив дискриминант квадратного трёхчлена *D* = 9 + 40*a*, найдём все *а*, удовлетворяющие неравенству *D <* 0. Получим, что *a* < .

**Ответ.** *a* < .

**43.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

8*x*6 – (4*x* + *a*)3 + 2*x*2 – 4*x* = *a* (1)

имеет более одного корня. [\*]

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде:

(2*x*2)3 + 2*x*2 = (4*x* + *a*)3 + (4*x* + *a*). (2)

Для каждого значения *a* левая часть уравнения (2) есть значение функции *f*(*t*) = *t*3 + *t* при *t*1 = 2*x*2, а правая — значение той же функции при *t*2 = 4*x* + *a*.

Функция *f*(*t*) является возрастающей, как сумма возрастающих функций *t*3 и *t*. Возрастающая функция каждое своё значение принимает только один раз, следовательно, уравнения *f*(*t*1) = *f*(*t*2) и *t*1 = *t*2 равносильны.

Следовательно, уравнение (2) равносильно уравнению:

2*x*2 = 4*x* + *a*.

Остаётся найти все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение 2*x*2 – 4*x* – *a* = 0 имеет более одного корня. Вычислив дискриминант квадратного трёхчлена *D* = 16 + 8*a*, найдём все *а*, удовлетворяющие неравенству *D* > 0. Получим, что *a* > –2.

**Ответ.** *a* > –2.

Идея начала решения следующего задания такая же, как предыдущего.

**44.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

8*x*6 + (*a* – |*x|*)3 + 2*x*2 – |*x|* + *a* = 0 (1)

имеет более трёх различных корней. [1-3]

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде:

(2*x*2)3 + 2*x*2 = (|*x| – a*)3 + (|*x|* – *a*). (2)

Левая часть уравнения (2) есть значение функции *f*(*t*) = *t*3 + *t* при *t*1 = 2*x*2, а правая — при *t*2 = |*x|* – *a*. Функция *f*(*t*) является возрастающей, как сумма возрастающих функций *t*3 и *t*. Следовательно, уравнения *f*(*t*1) = *f*(*t*2) и *t*1 = *t*2 равносильны.

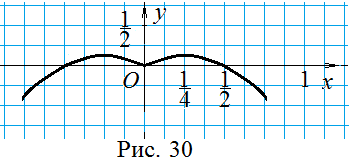
Это означает, что уравнение (2) равносильно уравнению:

2*x*2 = |*x|* – *a*.

Остаётся найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение   
*a* = –2*x*2 + |*x|* имеет более трёх различных корней.

Построим графики функций *y* = –2*x*2 + |*x|* и *y* = *a*.

1) Первая функция чётная, так как *f* (–*x*) = *f* (*x*) для любого *x*. Для *x* ≥ 0 имеем: *y* = , график — парабола с вершиной . Для *x* ≤ 0 график этой функции симметричен относительно оси *Oy* построенной части графика (рис. 30).

2) График функции *y* = *a* — прямая, параллельная оси *Ox*.

При *a* < 0 имеется две точки пересечения графиков функций *y* = и *y* = *a*.

При *a* = 0 — три точки пересечения графиков.

При 0 < *a* < имеется четыре точки пересечения графиков.

При *a* = имеется две точки пересечения графиков.

При *a* > нет точек пересечения графиков.

Уравнение (2) и равносильное ему уравнение (1) имеют более трёх различных корней, если графики функций имеют более трёх точек пересечения, т. е. при 0 < *a* < .

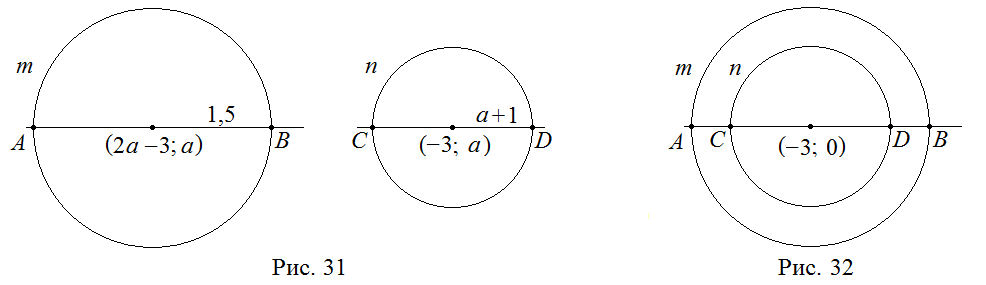
**Ответ.** 0 < *a* < .

**Движение окружностей**

**45.** Найдите все положительные значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений

(1)

имеет единственное решение. [2-1]

**Решение.** Для каждого положительного значения *a* уравнения системы задают две окружности: *m* с центром (2*a* – 3; *a*) и концами горизонтального диаметра *A* (2*a* – 4,5; *a*) и *B* (2*a* – 1,5; *a*) и *n* с центром (–3; *a*) и концами горизонтального диаметра *C* (–*a* – 4; *a*) и *D* (*a* – 2; *a*) (рис. 31).

При *a* = 0 окружности *m* и *n* имеют общий центр (–3; 0) и радиусы 1,5 и 1 соответственно (рис. 32). При увеличении значений *a* окружность *m* перемещается вправо, не меняя радиуса, а окружность *n* лишь увеличивает радиус. Центры окружностей и точки *A*, *B*, *C*, *D* лежат на одной прямой, параллельной оси *Ox*, поэтому окружности имеют единственную общую точку лишь в одном из двух случаев: при совпадении точек *A* и *C* или точек *A* и *D*, т. е. если

2*a* – 4,5 = –*a* – 4 или 2*a* – 4,5 = *a* – 2.

Решив полученные уравнения относительно *a*, получим их корни *a* = и *a* = 2,5 соответственно.

Система (1) имеет единственное решение, если окружности *m* и *n* имеют единственную общую точку, т. е. лишь при *a* = и *a* = 2,5.

**Ответ.** *a* = , *a* = 2,5.

**46.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

(1)

имеет три решения (*x*; *a*). [\*]

**Решение.** Каждое решение системы (1) будем изображать точкой (*x*; *a*) координатной плоскости *xOa*. Сначала изобразим все точки, удовлетворя­ющие уравнению системы (1).

Если *x* ≥ 0, *a* ≥ 0, то получатся все точки окружности с центром (1; 1) и радиусом 1. В каждом из трёх оставшихся случаев *x* ≥ 0, *a* ≤ 0; *x* ≤ 0, *a* ≥ 0 и   
*x* ≤ 0, *a* ≤ 0 также получатся окружности (рис. 33).

Отберём из полученных решений те, которые являются решениями неравенства системы (1).

Если *a* = 0, то неравенство системы (1) выполняется для любых пар (*x*; 0). Окружностям принадлежат лишь точки (–1; 0), (1; 0).

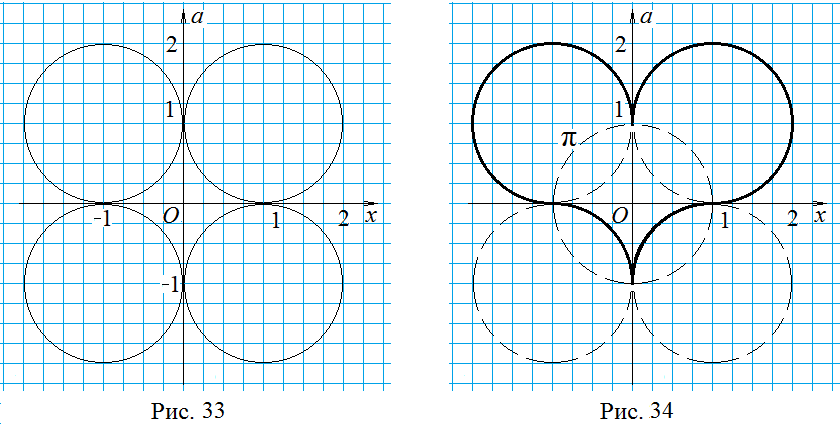
Если *a* > 0, то неравенство системы (1) выполняется только в том случае, если , т. е. только для тех пар чисел (*x*; *a*), для которых точки   
(*x*; *a*) лежат вне окружности π с центром (0; 0) и радиусом 1, а также на этой окружности.

Таким образом, все решения (*x*; *a*) системы в случаях *a* = 0и *a* > 0 изображаются точками (*x*; *a*), лежащими одновременно на двух верхних окружностях, на окружности π и вне этой окружности. На рисунке 34 эти точки выделены жирной линией.

Аналогично рассуждая для *a* < 0, получим все точки (*x*; *a*), лежащие одновременно на двух нижних окружностях, внутри окружности π и на этой окружности. На рисунке 34 все такие точки также выделены жирной линией. Для большей наглядности остальные части четырёх окружностей и окружность π показаны пунктиром.

Таким образом, все решения (*x*; *a*) системы изображены точками фигуры, выделенной жирной линией на рисунке 34. Получилось изображение «сердца».

Теперь можно ответить на вопрос задачи. Система (1) имеет решения для каждого числа *a* из промежутка –1 *a* 2, причём три решения (три и больше) она имеет для 1 *a* < 2.

**Ответ.** 1 *a* < 2.

Вот ещё вариации на «сердечную» тему.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**47.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система (1) имеет **ровно** три решения (*x*; *a*). [\*]

**48.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

(2)

имеет два решения (*x*; *a*). [\*]

**49.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система (2) имеет **ровно** два решения (*x*; *a*). [\*]

**===================================================**

**50.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

(1)

имеет два или три решения. [2-43]

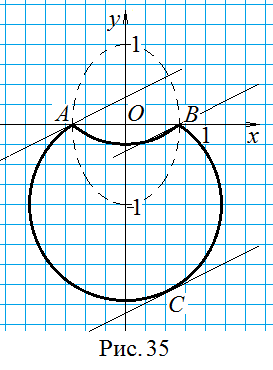
**Решение.** Каждое решение (*x*; *y*) системы (1) будем изображать точкой   
(*x*; *y*) координатной плоскости *xOy*. Сначала изобразим все решения (*x*; *y*) уравнения . Получим эллипс, изображённый на рисунке 35 пунктирной линией.

Пусть , т. е. точки (*x*; *y*) принадлежат эллипсу или лежат внутри него. В этом случае первое уравнение системы имеет вид:

Внутри эллипса находится часть параболы с вершиной (0; ), проходя­щая через точки *A* () и *B* (), принадлежащие эллипсу.

Пусть теперь , т. е. точки (*x*; *y*) принадлежат эллипсу или лежат вне его. В этом случае первое уравнение системы имеет вид:

Вне эллипса находится часть окружности с центром (0; –1) и радиусом , проходящая через точки *A* и *B* эллипса.

Второе уравнение системы задаёт прямую *y* = 0,5*x + a*, которая проходит через точку *A* при *a* = и касается окружности в точке *C*. Найдём значение параметра *a* для касательной к окружности из условия, что окружность и прямая имеют единственную общую точку. Подставив вместо *y* в уравнение окружности , получим уравнение:

,

имеющее единственный корень при *a* = –1 + и при  
*a* = –1 – . Через точку *C* проходит прямая

*y* = .

При *a* = и *a* = прямая имеет с построенной фигурой единственную общую точку, в каждом из этих случаев система (1) имеет единственное решение. При < *a* < прямая имеет не менее двух общих точек с построенной фигурой, следовательно, для каждого значения *a* из этого промежутка система имеет не менее двух решений, в том числе имеет два или три решения.

**Ответ.** < *a* < .

*Замечание.* Так как прямая *y* = 0,5*x + a* проходит через точку *B* при   
*a* = , касается построенной части параболы при *a* = и пересекает построенную фигуру в четырёх точках при < *a* < (проверьте это самостоятельно), то система имеет четыре решения при < *a* < . Только исключать этот случай из ответа (как это сделано в сборнике [2]) при имеющейся формулировке задания не следует, так как если система имеет четыре решения, то она имеет и два, и три решения — ведь в условии задачи не сказано: **ровно** 2 или **ровно** 3 решения.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**51.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

имеет **ровно** два или **ровно** три решения. [\*]

**===================================================**

**Логарифмическая функция, показательная функция**

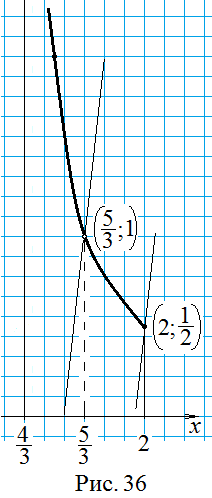
**52.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

log 3*x* – 4 (*a* + 9*x* + 5) = –1 (1)

имеет единственный корень на промежутке . [1-16]

**Решение.** Уравнение (1) равносильно системе

(2)

Два первых условия системы дают ограничения: *x* > , *x* ≠ .

Функция *f*(*x*) = убывает на промежутке ипринимает все значения в проме­жутке от *f*(2) = до +. График функции *y* = *f*(*x*) — гипербола с вертикальной асимптотой *x* = , она проходит через точки и (рис. 36).

При любом значении *a* линейная функция   
*g*(*x*) = 9*x* + *a* + 5 возрастает на промежутке . График функции *y* = *g*(*x*) — прямая, она проходит через точку при *a* = –22,5.

При *a* < –22,5 прямая не пересекает гиперболу на промежутке , так как её точки на этом промежутке находятся ниже точек рассматриваемого участка гиперболы.

При каждом значении *a*, таком, что *a* ≥ –22,5, прямая пересекает рассматриваемый участок гиперболы на промежутке , но так как *x* ≠ , то значение *a* = –19 не удовлетворяет условиям задачи, его надо исключить.

Таким образом, система (2) имеет единственное решение при значениях *a*, таких, что *a* –22,5, но *a* –19. Следовательно, равносильное ей уравнение (1) имеет единственный корень при тех же значениях *a*.

**Ответ.** [–22,5; –19) (–19; +.

**53.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет ровно четыре корня. [2-2]

**Решение.** Уравнение (1) равносильно уравнению

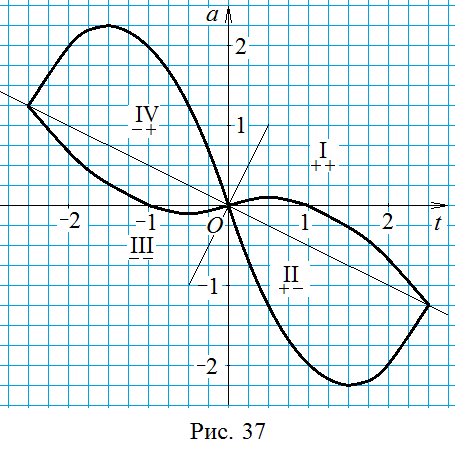
(2)

Выполнив замену неизвестного *t* = , перепишем уравнение (2) в виде:

(3)

Так как каждому значению *t* соответствует единственный корень уравнения *t* = , то осталось найти все значения *a*, при каждом из которых уравнение (3) имеет четыре корня.

В координатной плоскости *tOa* построим прямые *a* = 2*t* и *a* = , они разбивают координатную плоскость на 4 области: I, II, III, IV (рис. 37).

В области I |2*t* – *a*| = 2*t* – *a*,   
|*t* + 2*a*| = *t* + 2*a*, поэтому уравнение (3) имеет вид

В области II |2*t* – *a*| = 2*t* – *a*,   
|*t* + 2*a*| = –*t* – 2*a*, поэтому уравнение (3) имеет вид *a* =

В области III |2*t* – *a*| = –2*t* + *a*,   
|*t* + 2*a*| = –*t* – 2*a*, поэтому уравнение (3) имеет вид

В области IV |2*t* – *a*| = –2*t* + *a*,   
|*t* + 2*a*| = *t* + 2*a*, поэтому уравнение (3) имеет вид

Построив в областях I – IV части парабол с вершинами , , соответственно, получим «восьмёрку» — множество всех точек (*a*; *t*) координатной плоскости *tOa*, координаты которых обращают уравнение (3) в верное числовое равенство.

Уравнение (3), а значит, и уравнение (1) имеют ровно четыре корня, если *a* три корня, если *a* = 0 или *a* = , один корень, если   
*a* = , два корня, если < *a* < или < *a* < , не имеет корней, если   
*a* < или *a* > .

**Ответ.**

**54.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет хотя бы один корень, меньший 2. [2-3]

**Решение.** Выполнив замену неизвестного *t* = , перепишем уравнение (2) в виде:

(2)

Чтобы уравнение (1) имело корень, меньший 2 (0 < *x* < 2), должно выполняться условие: *t =*  = –1. Далее повторится решение предыдущего задания, только теперь требуется найти все значения параметра *a*, при каждом из которых для корня уравнения (2) выполняется неравенство   
*t >* –1. Искомые значения параметра составляют промежуток ≤ *a* < 2. Наименьшее значение в этом промежутке — значение функции *a* = *t*2 – 3*t* в точке *t* = , граница *a* = 2 — значение функции *a* = *t*2 – 3*t* в точке *t* = –1.

**Ответ.**  ≤ *a* < 2.

**55.** Найдите все значения параметра *а*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет ровно два неотрицательных корня. [2-4]

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде

(2)

Выполнив замену неизвестного *t* = , перепишем уравнение (2) в виде:

(3)

Чтобы уравнение (1) имело неотрицательный корень (*x* ≥ 0), должно выполняться условие: *t =*5*x* ≥ 1. Далее повторится решение задачи 53, только теперь достаточно рассмотреть *t* ≥ 1.

Итак, требуется найти все значения параметра *a*, при каждом из которых существует два различных корня уравнения (3), больших или равных 1. Искомые значения параметра составляют промежуток < *a* ≤ –2.

**Ответ.**  < *a* ≤ –2.

Следующую задачу можно отнести к шуточной номинации «Страшная снаружи, добрая внутри». При получении такой задачи на экзамене — главное не паниковать. Здесь, кажется, всё должно выбивать решающего из колеи: и неравенство «задом наперёд», и от корней да логарифмов рябит в глазах. «Спокойствие! Только спокойствие!» — говорил в таких случаях Карлсон. Давайте последуем мудрому совету.

**56.** Найдите все положительные значения параметра *а*, при каждом из которых множество решений неравенства

(1)

состоит из одной точки, найдите это решение. [2-5]

**Решение.** Сначала перенесём дробь в левую часть, после преобразований перепишем неравенство (1) в виде:

(2)

Присмотримся внимательно: для любого значения *a*, для любого значения *x*. Множество решений неравенства может состоять из одной точки лишь в одном случае: числитель дроби в неравенстве (2) равен нулю, а знаменатель — положительный. Первое возможно лишь при *x* = 0 и *a* = 4 (*a* = 0 не удовлетворяет условию «*a* — число положительное»). При этом знаменатель дроби равен положительному числу 6.

**Ответ.** *x* = 0 при *a* = 4.

**========= Задание для самостоятельного решения =========**

**57.** Найдите все неотрицательные значения параметра *а*, при каждом из которых множество решений неравенства

состоит из одной точки, найдите это решение. [2-30]

**===================================================**

**Иррациональне уравнение, иррациональное неравенство**

**58.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

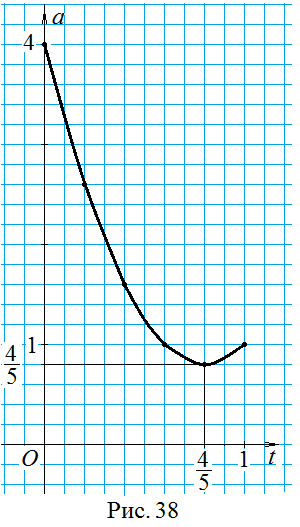
(1)

имеет хотя бы один корень. [1-1]

**Решение.** Выполнив замену неизвестного *t* = , 0 ≤ *t* ≤ 1, перепишем уравнение (1) в виде

(2)

Для каждого *t*, такого, что 0 ≤ *t* ≤ 1, уравнение (2) равносильно уравнению

****

5 (3)

Уравнение (1) имеет хотя бы один корень, если уравнение (3) имеет корни *t*, принадлежащие промежутку 0 ≤ *t* ≤ 1, т. е. если

≤ 1 или 0 ≤ ≤ 1.

Объединив решения этих иррациональных неравенств, получим, что ≤ *a* ≤ 4. Следовательно, уравнение (1) имеет корни для каждого *a* такого, что ≤ *a* ≤ 4.

*II способ.* Решение задачи можно упростить, выразив *a* через *t* из равенства (3), построив график функции *a* = 5*t*2 – 8*t* + 4 (рис. 38) и, определив множество значений этой функции на отрезке [0; 1]. Получится тот же ответ.

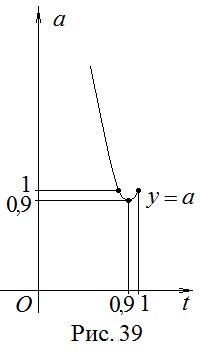
Впрочем, множество значений квадратичной функции на отрезке можно найти и без построения графика, вычислив ординату вершины параболы и значение функции на концах отрезков.

**Ответ.** ≤ *a* ≤ 4.

**59.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет хотя бы один корень. [1-2]

****Решение.** Выполнив замену неизвестного *t* = , 0 ≤ *t* ≤ 1, перепишем уравнение (1) в виде

(2)

Для каждого *t* такого, что 0 ≤ *t* ≤ 1, уравнение (2) равносильно уравнению

= 10 (3)

В координатной плоскости *xOa* построим график квадратичной функции (3), получим параболу с вершиной (0,9; 0,9), проходящую через точки (0; 9) и (1; 1) на концах отрезка [0; 1] (рис. 39). Точки (*t*; *a*) параболы являются изображениями решений (*t*; *a*) уравнения (3).

Уравнение (3) имеет решения на отрезке [0; 1], если 0,9 ≤ *a* ≤ 9. Оно не имеет решений на отрезке [0; 1], если *a* < 0,9 или *a* > 9.

**Ответ.** 0,9 ≤ *a* ≤ 9.

**Рассуждения с числовыми значениями**

Покажем применение этого метода сначала на двух несложных примерах.

**60.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

= 0 (1)

имеет корень. [\*]

***Решение.*** Предположим, что для некоторого значения параметра *a* уравнение (1) имеет корень , тогда для чисел *a* и справедливо числовое равенство:

= 0. (2)

Левая часть равенства (2) — сумма неотрицательных чисел, поэтому равенство (2) выполняется лишь при условии, что эти числа равны 0. Число равно нулю, если = 4 или = –4. В первом случае равенство (2) верно при *a* = ±2, а во втором — равенство (2) неверно при любом значении *a*.

Проверкой убеждаемся, что уравнение (1) имеет корень 4 при *a* = ±2.

**Ответ.** *a* = ±2.

*Замечание.*Суть рассуждения с числовыми значениями заключается в том, что мы предполагаем, что корень существует, пишем числовое равенство с и, используя свойства равенств, неравенств, функций и т. п., находим этот корень — без возведения уравнения в квадрат, раскрытия модулей и т. п. Решение задачи этим методом основано на предположении, что корень существует, поэтому в конце решения надо сделать проверку — убедиться, что найденное число действительно является корнем уравнения.

**61.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

+ – = *a* (1)

имеет корень. [\*]

***Решение.*** Предположим, что для некоторого значения параметра *a* уравнение (1) имеет корень , тогда для чисел *a* и справедливо числовое равенство:

. (2)

Заметим, что ≠ 0.

Если > 0, то из справедливости неравенства ≥ 2 для > 0 (причём = 2 для = 1) следует, что ≥ 2. Тогда квадратный корень определён лишь при условии = 1 и равенство (2) можно переписать в виде

,

,

.

Равенствам = 1 и удовлетворяют лишь числа = и   
*a* = .

Если < 0, то из справедливости неравенства ≤ –2 для < 0 (причём = –2 для = –1) следует, что ≥ 2. Тогда квадратный корень определён лишь при условии = –1 и равенство (2) можно переписать в виде

,

,

.

Равенствам = –1 и удовлетворяют лишь числа = и   
*a* = –1.

Проверкой убеждаемся, что уравнение (1) имеет корни: *x*= при *a* = и   
*x* = 0 при *a* = –1.

Итак, уравнение (1) имеет корень лишь при *a* = –1 и *a* = .

**Ответ.** При *a* = –1, *a* = .

Применим рассуждения с числовыми значениями для решения «страшного снаружи» задания.

**62.** При каждом значении параметра *a* решите уравнение

arcsin – arccos + = + arctg (2 – *x*). [\*] (1)

***Решение*.** Предположим, что для некоторого значения параметра *a* уравнение (1) имеет корень , тогда для чисел *a* и справедливо числовое равенство:

arcsin – arccos + = + arctg (2 – ). (2)

Из справедливости равенства (2) следует, в частности, что выражения и определены, а это означает, что число *x*0 удовлетворяет одновременно двум неравенствам ≥ 0 и ≥ 0. Легко проверить, что существует только два таких числа: *x*0 = 1 и *x*0 = –1. Рассмотрим оба случая.

1) Если *x*0 = 1, то равенство (2) можно переписать в виде

arcsin – arccos = arctg 1. (3)

Так как arcsin  = и arctg 1 = , то равенство (3) выполняется лишь при   
*a* = 2. Проверка показывает, что при *a* = 2 уравнение (1) имеет единственный корень *x* = 1.

2) Если *x*0 = –1, то равенство (2) можно переписать в виде

arcsin – arccos = arctg 3. (4)

Так как arcsin = < 0, –arccos ≤ 0 для тех *a*, для которых арккосинус определён, то левая часть равенства (4) отрицательна, а правая — положительна. Следовательно, равенство (4) неверно, поэтому число *x*0 = –1 не является корнем уравнения (1) ни при каком значении параметра.

Итак, при *a* = 2 уравнение (1) имеет корень *x* = 1, при *a* 2 уравнение (1) не имеет корней.

***Ответ.*** *x* = 1 при *a* = 2; нет корней при *a* 2.

**63.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

*a*2 + 8|*x* – 5| + 2 + |*x* – 2*a* – 5*|* (1)

имеет хотя бы один корень. [1-4]

**Решение.** *I способ.* Выполнив замену неизвестного: *t = x* – 5, перепишем уравнение (1) в виде

*a*2 + 8|*t*| + 2 + |*t* – 2*a|* (2)

Уравнение (1) имеет хотя бы один корень, если уравнение (2) имеет хотя бы один корень.

1) Если *t* ≥ 2*a*, то уравнение (2) имеет вид:

*a*2 + 8|*t*| + 2 *t*. (3)

Предположим, что уравнение (3) имеет корень *t*0, тогда верно числовое равенство:

*a*2 + 8|*t*0| + 2 *t*0, (4)

левая часть которого не меньше 4. Тогда верно неравенство *t*0≥ 4 и после раскрытия модуля равенство (4) имеет вид:

*a*2 + 7*t*0 + 2 0. (5)

Так как левая часть равенства (5) положительна для любых чисел *a* и *t*0, то это равенство неверно, следовательно, в рассматриваемом случае уравнение (2) корней не имеет.

2) Если *t* < 2*a*, то уравнение (2) имеет вид:

*a*2 + 8|*t*| + 2 – *t*. (6)

Перепишем уравнение (6) в виде:

(*a* – 2)2 + 8|*t*| + 2 – *t*. (7)

Если уравнение (7) имеет корень *t*0, то верно числовое равенство:

(*a* – 2)2 + 8|*t*0| + 2 4 – *t*0, (8)

левая часть которого не меньше 4. Тогда верно неравенство 4 – *t*0 ≥ 4, или   
*t*0≤ 0. После раскрытия модуля равенство (8) имеет вид:

(*a* – 2)2 – 7*t*0 + 2 4. (9)

Так как (*a* – 2)2 ≥ 0, –7*t*0 ≥ 0, 2 ≥ 4, то равенство (9) возможно лишь при условии, что *t*0 = 0, *a* = 2.

Проверкой убеждаемся, что при *a* = 2 уравнение (2) действительно имеет единственный корень *t*0 = 0. Следовательно, при *a* = 2 уравнение (1) имеет хотя бы один корень.

*II способ.* Найдём все значения *a*, при каждом из которых уравнение

*a*2 – 2*a* + 2 + 8|*x* – 5| – |*x* – 2*a* – 5*| =* 0 (10)

имеет хотя бы один корень.

Выполнив ту же замену неизвестного, перепишем уравнение (10) в виде

*a*2 – 2*a* + 2 + 8|*t*| – |*t* – 2*a| =* 0 (11)

Рассмотрим функцию *f* (*t*) = *a*2 – 2*a* + 2 + 8|*t*| – |*t* – 2*a|* непрерывную на множестве ***R***.

Так как функция возрастает на промежутке [0; +), принимая все значения из промежутка [4; +), а функция *v* (*u*) = 2 возрастает на промежутке [4; +), то для каждого значения *a* на промежутке [0; +) функция *v* (*u* (*t*)) = 2 возрастает, как композиция двух возрастающих функций.

Так как при *t* ≥ 0 (при любом раскрытии второго модуля) на каждом участке промежутка [0; +) имеем линейную функцию *g* (*t*) = 8*t* ± *t* ∓ 2*a* с положительным угловым коэффициентом, то для каждого значения *a* функция *g* (*t*) = *a*2 – 2*a* + 8|*t*| – |*t* – 2*a|* возрастает на промежутке [0; +).

Следовательно, для каждого значения *a* на промежутке [0; +) функция *f* (*t*) возрастает, как сумма возрастающих функций. Она достигает наименьшего значения в точке *t* = 0.

Аналогично показывается, что для каждого значения *a* функции *f* (*t*) убывает на промежутке (–; 0]. Следовательно, для каждого значения *a* на промежутке (–; 0] функция *f* (*t*) достигает наименьшего значения в точке   
*t* = 0.

Итак, доказано, что для каждого значения *a* функция *f* (*t*) достигает наименьшего значения в точке *t* = 0.

Уравнение (11) имеет хотя бы один корень при таких значениях *a*, для каждого из которых *f* (0) *≤* 0. Осталось решить неравенство:

*a*2 – 2*a* *–* 2|*a|* + 4 *≤* 0.

Если *a* ≥ 0, то неравенство имеет вид:

*a*2 – 4*a* + 4 *≤* 0.

Оно имеет единственное решение *a* = 2.

Если *a* < 0, то неравенство имеет вид

*a*2  *≤* 0.

Оно не имеет решений.

Итак, если *a* = 2, то уравнение (1) имеет хотя бы один корень.

**Ответ.** 2.

**64.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

*a*2 + 11|*x*| + + 5|2*x* – *a|* (1)

имеет хотя бы один корень. [1-8]

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде:

*a*2 + 11|*x*| + – 5|2*x* – *a| =* 0. (2)

Для каждого значения *a* функции *a*2 + и 11|*x*| – 5|2*x* – *a|* возрастают на промежутке [0; +) и убывают на промежутке (–; 0]. Следовательно, для каждого значения *a* функция *f* (*x*) достигает наименьшего значения в точке *x* = 0.

Уравнение (2) имеет хотя бы один корень при всех значениях *a*, для каж­дого из которых значение функции *f* (*x*) = *a*2 + 11|*x*| + – 5|2*x* – *a|* в точке *x* = 0 неотрицательно (доказательство аналогично приведенному в предыдущем решении. Осталось решить неравенство *f* (0) *≤* 0. Оно имеет вид: *a*2 – 5|*a|* + .

Если *a* ≥ 0, то неравенство (3) имеет вид:

*a*2 – 7*a* + *≤* 0.

Множество его решений есть отрезок .

Если *a* < 0, то неравенство (3) имеет вид *a*2 +  *≤* 0, оно не имеет решений. Итак, неравенство (1) имеет хотя бы один корень, если

*a* .

**Ответ.** *a* .

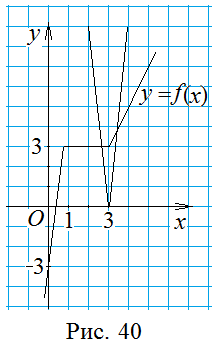
**Использование свойств функции**

**65.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

4*x* – 9|*x* – 3*|* (1)

имеет два корня. [2-31]

**Решение.** График функции *y* = 9|*x* – 3*|* — пара лучей, исходящих из точки (3; 0) (рис. 40)*.* Для любого значения *a* функция *f*(*x*) = 4*x* – обладает одним замечательным свойством: она неубывающая. В зависимости от значения параметра *a* угловой коэффициент линейной функции положительный или нуль, так как при любом раскрытии модулей функция задаётся формулой *y* = 4*x* . График этой функции состоит из прямо­линейных участков. На рисунке 40 он изображён для *a* = 3.

Уравнение (1) имеет два корня, если графики двух функций пересекаются в двух точках, для этого достаточно выполнения условия *f*(3) > 0. Решим неравенство *f*(3) > 0:

12 – > 0,

< 12,

< 12,

< 21,

< 21,

< 18.

Итак, уравнение (1) имеет два корня, если < 18.

**Ответ.** < 18.

**66.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

*a*2 + 10|*x*| + 5 + 3|3*x* – 5*a|* (1)

имеет хотя бы один корень. [1-7]

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде:

*a*2 – 5*a* + 5 + 10|*x| –* 3|3*x* – 5*a|=* 0. (2)

Для каждого значения *a* функции 5 и 10|*x| –* 3|3*x* – 5*a|* =   
= 10*x* 9*x* 15*a* возрастают на промежутке [0; +) и убывают на промежутке (–; 0]. Следовательно, для каждого значения *a* функция *f* (*x*) достигает наименьшего значения в точке *x* = 0.

Уравнение (2) имеет хотя бы один корень при таких значениях *a*, для каждого из которых *f* (0) *≤* 0. Осталось решить неравенство

*a*2 – 5*a* *–* 15|*a|* + 25 *≤* 0.

Если *a* ≥ 0, то неравенство (3) имеет вид:

*a*2 – 20*a* + 25 *≤* 0.

Множество его решений есть отрезок [10 – ; 10 + ].

Если *a* < 0, то неравенство (3) имеет вид

*a*2 + 25 *≤* 0.

Оно имеет единственное решение *a* = –5.

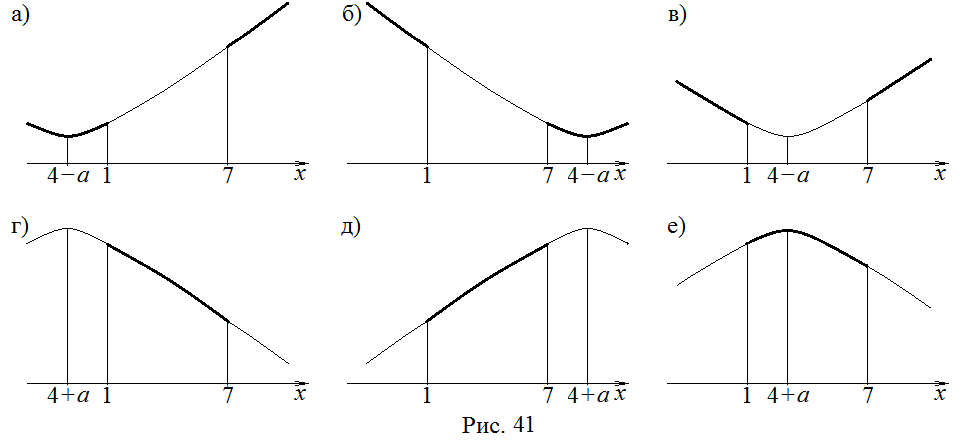
Итак, неравенство (1) имеет хотя бы один корень, если

*a* [10 – ; 10 + ] {–5}.

**Ответ.** *a* [10 – ; 10 + ] {–5}.

**67.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции *f* (*x*) = 2*ax* + больше 1.

**Решение.** 1) Рассмотрим функцию *f* (*x*) на промежутках (–; 1] и [7; +). На этих промежутках выполняется неравенство ≥ 0 и функция задаётся формулой *f*1 (*x*) = , её график — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина имеет абсциссу *x*1 = 4 – *a*.

Если *x*1 < 1, то верно неравенство *a* > 3 и наименьшее значение функции на промежутках (–; 1] и [7; +) есть *f*1 (4 – *a*) = (рис. 41, *а*). Неравенства и *a* > 3 одновременно выполняются для всех *a*, таких, что 3 < *a* < 4 + .

Если *x*1 > 7, то верно неравенство *a* < –3 и наименьшее значение функции на промежутках (–; 1] и [7; +) есть *f*1 (4 – *a*) = (рис. 41, *б*). Неравенства и *a* < –3 не имеют общих решений, следовательно, такой случай невозможен.

Если же 1 ≤ *x*1 ≤ 7, то верно двойное неравенство –3 ≤ *a* ≤ 3 и наименьшее значение функции на промежутках (–; 1] и [7; +) есть или *f*1 (1), или *f* 1 (7) (рис. 41, *в*). В этом случае должны выполняться три условия: –3 ≤ *a* ≤ 3,   
*f*1 (1) = 2*a* > 1 и *f* 1 (7) = 14*a* > 1. Три неравенства одновременно выполняются для всех *a*, таких, что < *a* < 3.

Таким образом, в случае 1) условия задачи выполнены для всех *a*, таких, что < *a* < 4 + .

2) Рассмотрим теперь функцию *f* (*x*) на отрезке [1; 7]. На этом отрезке выполняется неравенство ≤ 0 и функция задаётся формулой   
*f*2 (*x*) = –, её график — парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет абсциссу *x*2 = 4 + *a*.

Если *x*2 < 1, то верно неравенство *a* < –3 и наименьшее значение функции на отрезке [1; 7] есть *f*2 (7) = 14 (рис. 41, *г*). Неравенства *a* < –3 и 14*a* > 1 не имеют общих решений, следовательно, такой случай невозможен.

Если *x*2 > 7, то верно неравенство *a* > 3 и наименьшее значение функции на отрезке [1; 7] есть *f*2 (1) = 2 (рис. 41, *д*). Неравенства *a* > 3 и 2*a* > 1 одновременно выполняются для всех *a*, таких, что *a* > 3.

Если же 1 ≤ *x*2 ≤ 7, то верно двойное неравенство –3 ≤ *a* ≤ 3 и наименьшее значение функции на отрезке [1; 7] есть или *f*2 (1) = 2, или *f*2 (7) = 14 (рис. 41, *е*). Неравенства –3 ≤ *a* ≤ 3, 2*a* > 1 и 14*a* > 1 одновременно выполняются для всех *a*, таких, что < *a* ≤ 3.

Таким образом, в случае 2) условия задачи выполнены для всех *a*, таких, что *a* > .

Условия задачи выполнены в случаях 1) и 2) одновременно для всех *a*, таких, что < *a* < 4 + .

**Ответ.** < *a* < 4 + .

**68.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых множество значений функции *y* = содержит отрезок [2; 3].

**Решение.** Пусть *t* = cos *x*, –1 ≤ *t* ≤ 1, *b* = + 1, Найдём все значения параметра *b* ≥ 1, при каждом из которых значения функции *f* (*t*) = на промежутке –1 ≤ *t* ≤ 1 содержат отрезок [2; 3]. Так как – ≥ –1, а *b*2 + 1 =   
= 2 + 1 ≥ 2, то при любом значении *b* функция *f* (*t*) определена и непрерывна в каждой точке отрезка [–1; 1] и *f* ' (*t*) = < 0 в каждой точке отрезка [–1; 1]. Следовательно, функция *f* (*t*) убывает на отрезке [–1; 1].

Чтобы отрезок [2; 3] входил в множество значений функции *f* (*t*) должны выполнять два неравенства: *f* (–1) ≥ 3, *f* (1) ≤ 2.

Решив систему неравенств

получим, что – ≤ *b* ≤ 1. Но так как *b* ≥ 1, то условиям задачи удовлетворяет единственное значение *b* = 1. Это означает, что условиям задачи удовлетворяет единственное значение *a* = 0.

**Ответ.** 0.

**69.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство

(1)

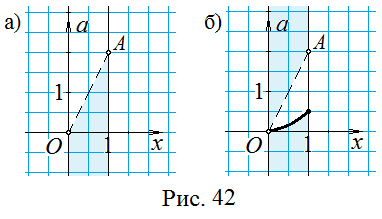
справедливо для всех значений *x* из отрезка [0; 1]. [2-19]

**Решение.** Перепишем неравенство (1) в виде:

(2)

Неравенство (2) на множестве пар чисел (*x*; *a*), таких, что 0 ≤ *x* ≤ 1, равносильно системе:

которую можно переписать в виде

**Сначала изобразим точками координатной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), являющиеся решениями неравенства (3) для всех *x*, таких, что 0 ≤ *x* ≤ 1. Точки отрезка *OA* прямой *a* = 2*x* изобразим пунктиром, они не изображают решения неравенства (3), так как знаменатель дроби в неравенстве (3) не равен нулю. Неравенство (3) выполняется для всех пар чисел (*x*; *a*), изображённых точками закрашенной области (рис. 42, *а*). Неравенство (3) справедливо для всех значений *x* из отрезка [0; 1] лишь для *a* < 0.

Теперь изобразим точками координат­ной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), являющиеся решениями неравенства (4) для всех *x*, таких, что 0 ≤ *x* ≤ 1. Точки отрезка *OA* прямой *a* = 2*x* изобразим пунктиром, они не изображают решения неравенства (4), так как знаменатель дроби в неравенстве (4) не равен нулю. Точки параболы *a* = соответствуют парам чисел (*x*; *a*), *x* ≠ 0, обращающим в нуль числитель дроби в неравенстве (4). Прямая и парабола разбивают полосу в координатной плоскости для 0 ≤ *x* ≤ 1 на три области (рис. 42, *б*). Для любых пар чисел (*x*; *a*), изображённых точками закрашенных областей неравенство (4) справедливо (проверьте это самостоятельно, выбрав по одной точке из каждой области). Неравенство (4) справедливо для всех значений *x* из отрезка [0; 1] лишь для *a* < 0 и для *a* > 2.

Тогда система неравенств (3) и (4) и равносильное ей неравенство (1) справедливы для всех значений *x* из отрезка [0; 1] лишь для *a* < 0.

**Ответ.** *a* < 0.

*Замечание*. Известен «метод интервалов» для решения неравенств с помощью координатной оси. Приём, с помощью которого решена предыдущая задача, можно назвать «методом областей».

**70.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых неравенство

(1)

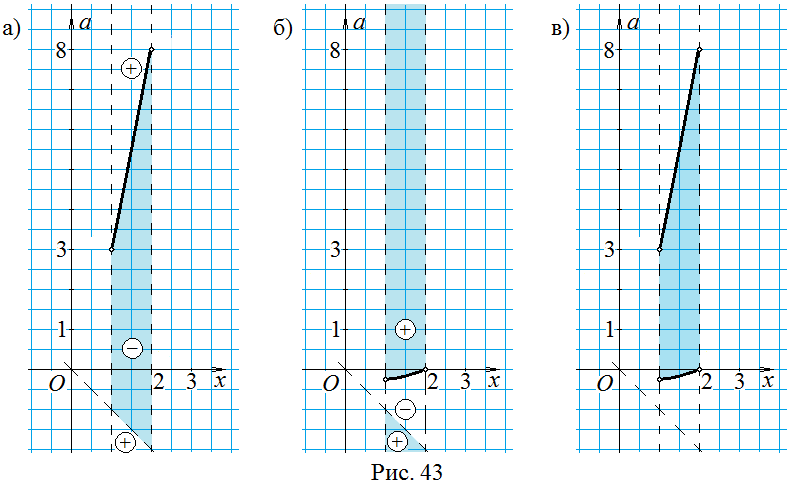
не имеет решений на интервале (1; 2).

**Решение.** Перепишем неравенство (1) в виде:

(2)

Неравенство (2) на множестве пар чисел (*x*; *a*), таких, что 1 < *x* < 2, равносильно системе:

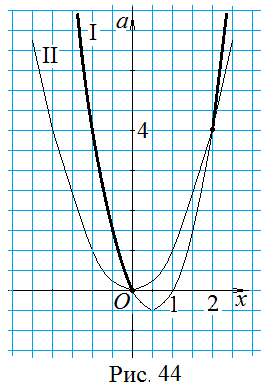
которую можно переписать в виде

**Сначала для всех *x*, таких, что 1 < *x* < 2, изобразим точками координатной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), являющиеся решениями неравенства (3). Точки прямой *a* = –*x* изобразим пунктиром, они не изображают решения неравенства (3), так как знаменатель дроби в неравенстве (3) не равен нулю. Точки параболы *a* = + 2*x* соответствуют парам чисел (*x*; *a*), обращающим в нуль числитель дроби в неравенстве (4). Неравенство (3) выполняется для всех пар чисел (*x*; *a*), изображённых точками закрашенной области (рис. 43, *а*).

Теперь для всех *x*, таких, что 1 < *x* < 2, изобразим точками координатной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), являющиеся решениями неравенства (4). Точки прямой *a* = –*x* изобразим пунктиром, они не изображают решения неравенства (4), так как знаменатель дроби в неравенстве (4) не равен нулю. Точки параболы соответствуют парам чисел (*x*; *a*), обращающим в нуль числитель дроби в неравенстве (4). Неравенство (4) выполняется для всех пар чисел (*x*; *a*), изображённых точками закрашенных областей (рис. 43, *б*).

Все решения системы неравенств (3) и (4), а также равносильного им неравенства (1) изображены на рисунке 43, *в*.

Так как на интервале 1 < *x* < 2 для каждого *a*  найдётся хотя бы одно решение (*x*; *a*) неравенства (1), то все значения *a*, для каждого из которых для любого *x* из интервала (1; 2) неравенство (1) не имеет решений, составляют множество .

**Ответ.** .

**71.** При каких значениях параметра *a* уравнение

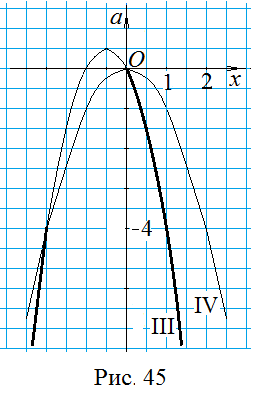
(1)

имеет ровно три корня?

**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде

(2)

Рассмотрим три возможности раскрыть модули в уравнении (2).

1) Если *a* , то = уравнение (2) имеет вид

(3)

Изобразим точками координатной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), удовлетворяющие неравенству  
 *a*  и уравнению (3), получим точки параболы   
*a* = 2*x*2 – 2*x* (I), лежащие на параболе *a* = *x*2 (II) и выше её. На рисунке 44 эти точки выделены жирной линией.

2) Если *a* , то = уравнение (2) имеет вид

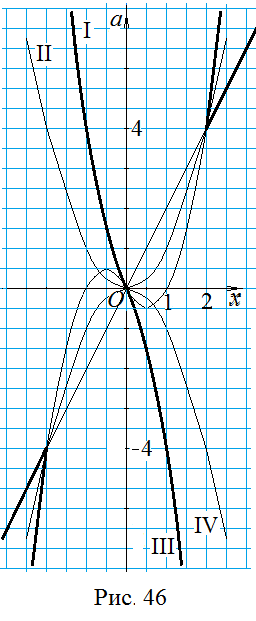
(4)

Изобразим точками все пары чисел (*x*; *a*), удовлет­воряющие неравенству *a*  и уравнению (4). Получим точки параболы *a* = –2*x*2 – 2*x* (III), лежащие на параболе *a*  и ниже её. На рисунке 45 эти точки выделены жирной линией.

3) Если < *a <* , то = уравнение (2) имеет вид

*a* = 2*x*. (5)

Изобразим точками координатной плоскости *xOa* все пары чисел (*x*; *a*), удовлетворяющие двойному неравенству –*x*2< *a* < *x*2 и уравнению (5). Получим точки прямой *a* = 2*x*, лежащие выше параболы *a* = –*x*2(IV) и ниже параболы *a* = *x*2 (II). На рисунке 46 эти точки выделены жирной линией.

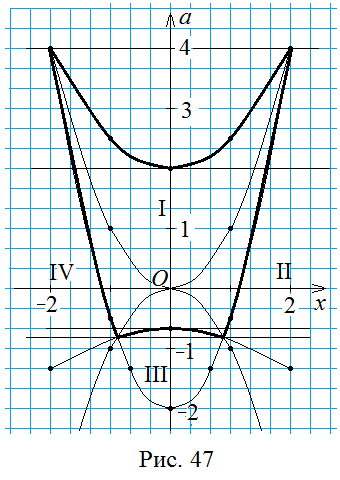
Каждому значению *a* из промежутка –4 < *a* < 4 соответствует единственная выделенная точка (*x*; *a*), числам *a* = 4 и *a* = –4 — две точки, а каждому значению *a* > 4 и каждому значению *a* < –4 — три такие точки. Это означает, что при каждом значении параметра *a*, таком, что –4 < *a* < 4, уравнение (1) имеет единствен­ный корень, при *a =* 4 и *a =* –4 уравнение (1) имеет ровно два корня, а при каждом значении параметра *a*, таком, что *a* > 4 или *a* < –4 уравнение (1) имеет ровно три корня.

**Ответ.** *a* > 4, *a* < –4.

**72.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

(1)

имеет четыре корня. [\*]

**Решение.** Рассмотрим три возможности раскрыть модули в уравнении (1). Параболы *a =*  и *a =* разбивают координатную плоскость на четыре области I, II, III и IV (рис. 47).

1) В области I первый модуль раскроем со знаком «+», второй со знаком «–». Уравнение (1) имеет вид

(2)

В координатной плоскости *xOa* изобразим параболу (2). Все её точки из области I, выделенные жирной линией, изображают пары чисел (*x*; *a*), удовлетворяющие неравенству   
*a*  и уравнению (1). Эта парабола пересекает параболу *a =* в точках (–2; 4) и (2; 4). Ордината вершины параболы 2.

2) В областях II и IV оба модуля раскроем со знаком «+». Уравнение (1) имеет вид

(3)

Построим параболу (3). Все её точки, выделенные жирной линией, изображают пары чисел (*x*; *a*), удовлетворяющие двойному неравенству   
– и уравнению (1). Эта парабола пересекает параболу *a =*  в точках (–2; 4) и (2; 4), а параболу *a =*  в точках (–; –0,8) и (; –0,8). Ордината вершины параболы –2.

3) В области III первый модуль раскроем со знаком «–», второй со знаком «+». Уравнение (1) имеет вид

(4)

Построим параболу (4). Все её точки, выделенные жирной линией, изображают пары чисел (*x*; *a*), удовлетворяющие неравенству   
*a*  и уравнению (1). Эта парабола пересекает параболу *a =*  в точках и . Ордината вершины параболы .

На рисунке 47 жирной линией выделены все точки (*x*; *a*), такие, что соответствующие им пары чисел (*x*; *a*) обращают уравнение (1) в верное равенство. Уравнение (1) имеет четыре корня для таких значений *a*, для которых горизонтальная прямая пересекает выделенные участки парабол в четырёх точках. В каждом из этих случаев одному значению *a* соответствует четыре различных значения *x* — четыре корня уравнения (1) при данном значении параметра *a*. Условию задачи удовлетворяют значения *a* из двух интервалов и .

**Ответ.** *a*  и .

**73.** При каких значениях параметра *a* уравнение

(1)

имеет ровно три корня? [2-18]

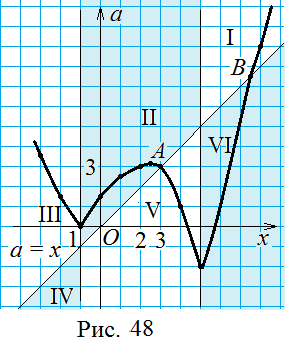
**Решение.** Перепишем уравнение (1) в виде

(2)

Так как = 0 при *x* = –1 и при *x =* 5, = 0 при , то все точки (*x*; *a*) координатной плоскости *xOa*, координаты которых обращают в нуль выражения, стоящие под знаками модуля, лежат на прямых *x* = –1, *x =* 5, *a* = *x*. Эти прямые разбивают координатную плоскость на шесть областей   
I – VI (рис. 48). Внутри каждой из них выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак.

1) В областях I и III = –*x + a*, уравнение (2) имеет вид:

(3)

Каждому решению (*x*; *a*) уравнения (3) соответствует точка (*x*; *a*) координатной плоскости, лежащая на параболе (3) с вершиной (; ). На рисунке 48 жирной линией выделены части этой параболы, лежащие в областях I и III.

2) В области II 5,   
|*x – a*| = –*x + a*, уравнение (2) имеет вид:

(4)

Каждому решению (*x*; *a*) уравнения (4) соответствует точка (*x*; *a*) коорди­натной плоскости, лежащая на параболе (4) с вершиной (; ). На рисунке 48 жирной линией выделена часть этой параболы, лежащая в области II.

3) В областях IV и VI = *x – a*, уравнение (2) имеет вид:

(5)

Каждому решению (*x*; *a*) уравнения (5) соответствует точка (*x*; *a*) коорди­натной плоскости, лежащая на параболе (5) с вершиной (; ). На рисунке 48 жирной линией выделена часть этой параболы, лежащая в области VI (в области IV точек этой параболы нет).

4) В области V = *x – a*, уравнение (2) имеет вид:

(6)

Каждому решению (*x*; *a*) уравнения (6) соответствует точка (*x*; *a*) коорди­натной плоскости, лежащая на параболе (6) с вершиной (; ). На рисунке 48 жирной линией выделена часть этой параболы, лежащая в области V.

В точках *A* и *B* соединяются разные параболы. Нетрудно проверить, что они пересекаются именно на прямой *a = x*.

Итак, лишь при *a* = 0 и *a* = уравнение (1) имеет ровно три корня, так как только этим значениям параметра *a* соответствуют ровно три точки нарисованной линии. При *a* < –2 уравнение не имеет корней, при –2 < *a* < 0 и при *a* > уравнение (1) имеет ровно два корня, при 0 < *a* < уравнение (1) имеет ровно четыре корня.

**Ответ.** *a* = 0, *a* = .

**Задачи целочисленными параметрами**

Рассмотрим две задачи с параметрами, принимающими целые значения. Они из сборника популярных авторов И.Н. Сергеева и В.С. Панферова.

**74.** Найдите все целые *a*, при каждом из которых графики функций

и (1)

пересекаются в точке с целочисленными координатами. [4]

**Решение.** Сначала отметим, что если для некоторого значения параметра *a* графики функций (1) пересекаются, то их точка пересечения единственная, так как для этого значения *a* первая из функций (1) убывающая, а вторая возрастающая.

График функции можно получить переносом графика функции на единиц вправо или влево — в зависимости от знака числа 2*a*, а график функции можно получить переносом графика функции на единиц вправо или влево — в зависимости от знака числа . При этом возможны три случая:

1) = ; 2) > ; 3) < .

1) Если = , то существуют только два целых значения *a*, при это равенство верно *a* = 0, *a* = –2, третий корень уравнения не целый.

Если *a* = 0, то уравнение

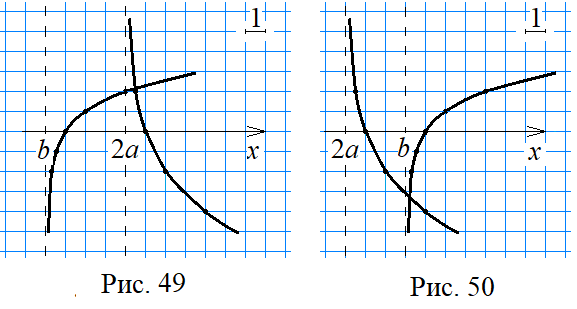
=

имеет очевидный корень *x* = 1 — целое число (и он единственный в силу сделанного выше замечания). Следовательно, *a* = 0 удовлетворяет условиям задачи.

Если *a* = –2, то уравнение

=

имеет очевидный корень *x* = –3 — целое число (он единственный). Следовательно, *a* = –2 удовлетворяет условиям задачи. Для краткости обозначим *b* = .

2) и 3) Если > или < *b*, то графики функций (1) выглядят, как на рисунках 49 и 50 соответственно. Вертикальные асимптоты графи­ков *x* = 2*a* и *x* = *b* изображены пунктирной линией. В каждом из этих случаев абсцисса точки пересечения графиков лежит внутри интервала длины 1, следовательно, она является дробным числом.

Таким образом, в случаях 2) и 3) не существует целых значений *a*, удовлетворяющих условиям задачи.

**Ответ.** *a* = 0, *a* = –2.

**75.** Найдите все пары целых чисел *a* и *b*, для каждой из которых уравнение

(1)

имеет не менее 10 различных корней. [4]

**Решение.** Сначала отметим, что если для некоторой пары целых чисел *a* и *b* существует корень уравнения (1), то *a* ≠ 0, . При этих условиях выполняется двойное неравенство –1 ≤ ≤ 1. Рассмотрим два возможных случая для *a*.

1) Пусть *a* > 0, тогда верны неравенства: *a* , 0 ≤ ≤ 1, ≥ 0 и выражение, стоящее под знаком модуля в уравнении (1), положительно. Перепишем уравнение (1) в виде:

,

(2)

Так как –1 ≤ ≤ 1, то ≤ и из неравенства   
0,5 2 следует, что целое число *b* может быть равным –2 или –1.

При *b* = –2 уравнение (2) равносильно уравнению:

(3)

Уравнение (3) имеет бесконечное множество решений: *x* = , *n* ∈ ***Z*** для каждого целого значения *a* = 1, 2, 3, … Но нас интересуют лишь такие значения *a*, для каждого из которых неравенство

*a* (4)

имеет не менее 10 целых решений *n*, тогда уравнения (1) имеет не менее 10 корней. Умножив неравенство (4) на положительное число 2*a*, перепишем его в виде

2 ,

–2 2,

. (5)

Нетрудно убедиться, что неравенство (5) имеет не менее 10 различных целых решений *n* лишь при *a* ≥ 4. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют пары целых чисел *a* и *b*, такие, что *a* ≥ 4, *b* = –2.

При *b* = –1 уравнение (2) равносильно уравнениям:

(6)

Уравнение (6) имеет бесконечное множество решений: *x* = , *n* ∈ ***Z*** для каждого целого значения *a* = 1, 2, 3, … Но нас интересуют лишь такие значения *a*, для каждого из которых неравенство

*a* (7)

имеет не менее 10 целых решений *n*, тогда уравнение (1) имеет не менее 10 корней. Умножив неравенство (7) на положительное число *a*, перепишем его в виде

,

. (8)

Нетрудно убедиться, что неравенство (8) имеет не менее 10 различных целых решений *n* лишь при *a* ≥ 3. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют пары целых чисел *a* и *b*, такие, что *a* ≥ 3, *b* = –1.

2) Пусть теперь *a* < 0, тогда верны неравенства: –*a* , –1 ≤ ≤ 0, ≤ 0 и выражение, стоящее под знаком модуля в уравнении (1), отрицательно. Перепишем уравнение (1) в виде:

. (9)

При любых целых *a* и *b*, таких, что *a* < 0 число *ab* равно 0 или –1. Уравнение (9) не может иметь не менее 10 корней *x* ни в одном из возможных случаев.

**Ответ.** *a* = 4, 5, … при *b* = –2; *a* = 3, 4, … при *b* = –1.

**Конкурсная задача про арксинус и 14-угольник**

**76.** Найдите все *a*, при каждом из которых фигура, заданная неравенством

(1)

представляет собой 14-угольник. **[5, № 1649, эконом. ф. МГУ, 1996]**

**Решение.** Если пара чисел является решением неравенства (1), то решением этого неравенства является каждая из трёх пар , , . Квадратный корень имеет смысл, если , но при *a* = 0 фигура *F*, заданная неравенством (1), превращается в точку, значит,   
*a* > 0. Сначала надо построить множество всех точек , изображающих решения неравенства (1), в I-й четверти системы координат *xOy*, затем, пользуясь симметриями относительно осей координат, — всю фигуру *F*.

Границей фигуры *F* в I-й четверти является график функции *y* = *f* (*x*), заданной уравнением:

. (2)

Область определения функции (2) задаёт двойное неравенство 0 ≤ *x* ≤ *a*.

Функция

(3)

определена на множестве ***R*** и является периодической с периодом 2*π*.

Если ≤ *x* ≤ , то функция (3) задаётся формулой , её график — отрезок.

Пусть ≤ *x* ≤ . Так как и ≤ ≤ , то функция (3) задаётся формулой , её график — отрезок. Далее строим график функции (3), пользуясь её периодичностью (рис. 51).

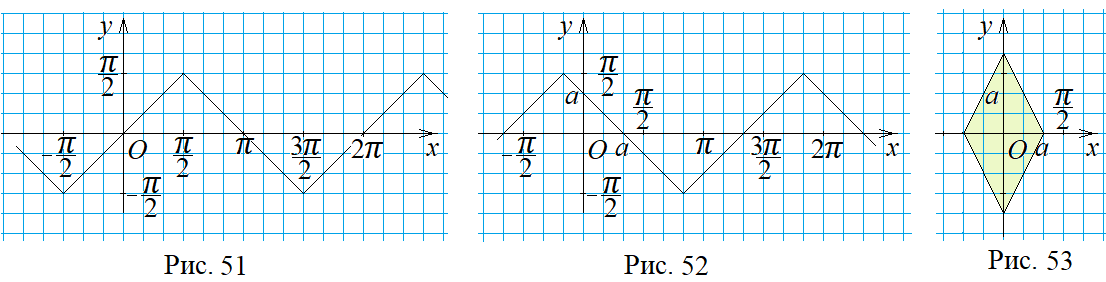
Введём обозначения: *f*1 (*x*) = и *f*2 (*x*) , тогда   
*f* (*x*) = *f*1 (*x*) + *f*2 (*x*). Все функции рассматриваем на отрезке 0 ≤ *x* ≤ *a*.

Для любого *a* > 0 функция *y* = *f*1 (*x*) задаётся формулой *y* = , её график — отрезок с концами в точках (0; *a*) и (*a*; 0). Так как верно равенство

,

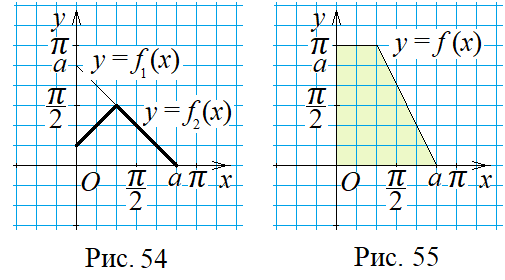
то функция *y* =  *f*2 (*x*) задаётся формулой *y* = .

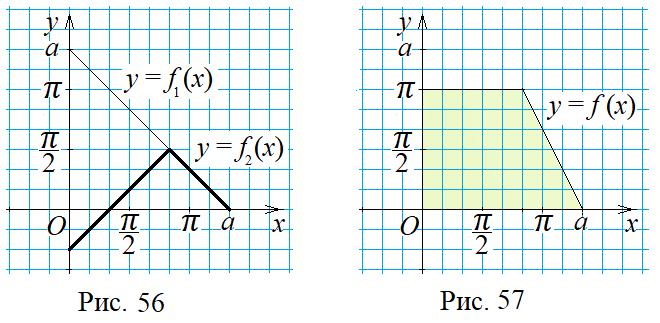
График функции *y* = *f*2 (*x*) получается из графика функции (3) сдвигом его на *a* единиц вправо и отражением относительно оси *Ox* (рис. 52).

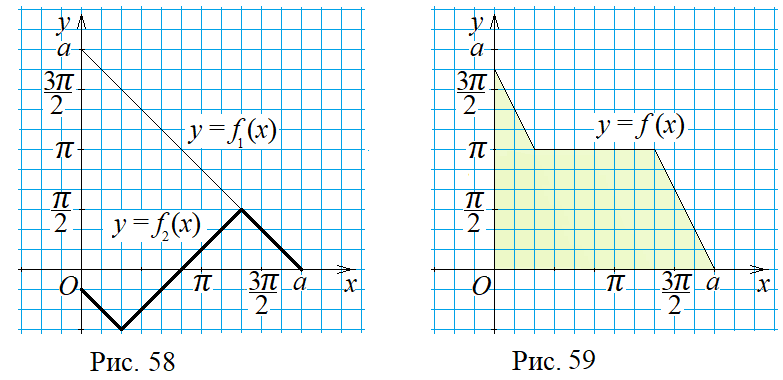
Для каждого из рассматриваемых промежутков значений *a* будем строить графики функций: *y* = *f*1 (*x*), *y* = *f*2 (*x*) и *y* = *f* (*x*) на отрезке [0; *a*]. Для краткости два последних графика будем иногда называть: ломаная *y* = *f*2 (*x*) и ломаная   
*y* = *f* (*x*).

1) Если 0 < *a* ≤ , то граница фигуры *F* в I-й четверти задаётся формулой   
*y* = 2*a* – 2*x*. Графиком этой функции является отрезок с концами в точках   
(0; 2*a*) и (*a*; 0). *F* — четырёхугольник (рис. 53).

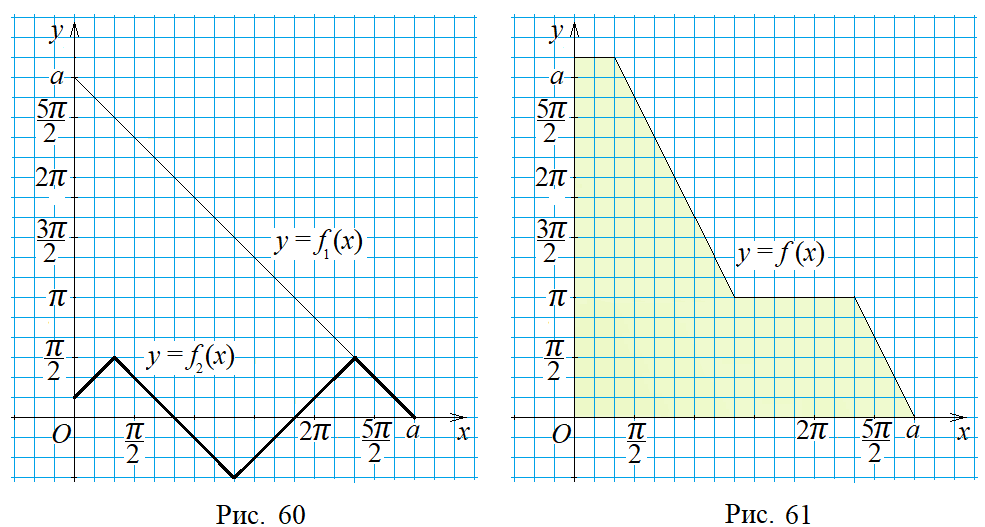
2) Пусть < *a* ≤ . Графики функций *y* = *f*1 (*x*) и *y* = *f*2 (*x*) изображены на рисунке 54. Границей фигуры *F* в I-й четверти является ломаная *y* = *f* (*x*) (рис. 55). На рисунке 55 изображена часть фигуры *F*, расположенная в I-й четверти. *F* — шестиугольник.



3) Пусть < *a* ≤ . Графики функций *y* = *f*1 (*x*) и *y* = *f*2 (*x*) изображены на рисунке 56, ломаная *y* = *f* (*x*) — на рисунке 57. *F* — шестиугольник.

4) Пусть < *a* ≤ . Графики функций *y* = *f*1 (*x*) и *y* = *f*2 (*x*) изображены на рисунке 58, ломаная *y* = *f* (*x*) — на рисунке 59. *F* — 12-угольник.

Заметим, что в случаях 2) и 3) одинаковы: количества звеньев ломаной   
*y* = *f*2 (*x*), ломаной *y* = *f* (*x*), а также количества сторон многоугольника *F*.

5) Если < *a* ≤ , то, по сравнению с предыдущим случаем, число звеньев ломаной *y* = *f*2 (*x*) не изменилось, не изменилось и число сторон многоугольника *F*. В этом случае фигура *F* тоже 12-угольник.

6) Пусть < *a* ≤ 3. Графики функций *y* = *f*1 (*x*) и *y* = *f*2 (*x*) изображены на рисунке 60, ломаная *y* = *f* (*x*) — на рисунке 61. *F* — 14-угольник.

7) Если 3< *a* ≤ , то, по сравнению с предыдущим случаем, число звеньев ломаной *y* = *f*2 (*x*) не изменилось, не изменится и число сторон многоугольника *F*. В этом случае *F* — 14-угольник.

При дальнейшем увеличении *a* число звеньев ломаной *y* = *f*2 (*x*) увеличивается, число звеньев ломаной *y* = *f* (*x*) тоже увеличивается, а многоугольник *F* будет иметь более 14 вершин.

Условиям задачи удовлетворяют все *a*, такие, что .

**Ответ.** .

**77.** Можно ли описанным выше способом задать 2018-угольник. Если да, то укажите соответствующий промежуток значений параметра. [\*]

**Надо ли проверять единственность решения?**

В некоторых задачах требуется найти значение параметра, при котором система имеет единственное решение. При решении таких задач обычно рассуждают так: предположим, что система имеет решение. Воспользуемся её особенностями, чтобы определить, при каком условии на параметр она имеет единственное решение. Но на этом решение задачи не заканчивается. Ещё надо убедиться, что при найденном значении параметра система имеет решение и оно единственное. Рассмотрим подготовительное задание, которое подтвердит сказанное.

**78.** Найдите значения параметра *a* , при каждом из которых система

(1)

имеет единственное решение. [\*]

**Решение.** Неизвестные *x* и *y* входят в систему (1) симметрично, следовательно, если при некотором значении *a* система имеет решение , то она имеет и решение . Причём если , то эти решения различны. Следовательно, чтобы система имела единственное решение, должно выполняться условие . Решив второе уравнение системы (1) при условии *x* = *y*, получим две пары решений: (2; 2) и (–2; –2). Из первого уравнения системы (1) найдём значения параметра, соответствующие этим решениям: = 8 и = 0.

Проверим, действительно ли при каждом найденном значении параметра система (1) имеет единственное решение.

1) Пусть *a* = 8, тогда система (1) имеет вид:

(2)

Умножив первое уравнение системы (2) на 2 и сложив со вторым уравнением, получим уравнение:

следовательно, система (2) равносильна системе

(3)

Все решения системы (3) являются или решениями системы

(4)

или решениями системы

(5)

Система (4) имеет единственное решение (2; 2), а система (5) не имеет решений. Следовательно, при *a* = 8 система (1) действительно имеет единственное решение.

2) Пусть *a* = 0, тогда система (1) имеет вид:

(6)

Умножив первое уравнение системы (6) на 2 и сложив со вторым уравнением, получим уравнение:

следовательно, система (6) равносильна системе

(7)

Все решения системы (7) являются или решениями системы

(8)

или решениями системы

(9)

Система (8) имеет единственное решение (–2; –2), а система (9) имеет два решения: (; ) и (; ). Следовательно, при *a* = 0 система (1) имеет три различных решения.

**Ответ.** 8.

**Замечание.** Оказалось, что при условии *x* = *y* система (1) имеет единственное решение при *a* = 8, и два различных решения *a* = 0. Поэтому найденные значения параметра нуждаются в проверке на выполнение условий задачи.

А теперь попробуем решить задачу, предназначенную абитуриентам.

**79.** Найдите все значения α, при которых система

(1)

имеет единственное решение. **[6]**

**Решение.** Заметим, что если при некотором значении система имеет решение , то она имеет и решение , так как неизвестные *x* и *y* входят симметрично в третье уравнение системы (1) и во второе уравнение, которое можно записать так:

.

Первое уравнение системы (1) также не меняется при замене *x* на *y* и *y* на *x*, так как и ,

Причём если , то решения и различны. Следовательно, чтобы система имела единственное решение, должно выполняться условие .

Итак, пусть *x* = *y*, заменив в системе (1) *y* на *x*, перепишем её в виде:

(2)

Если *z* ≠ 0, то кроме решения система (2) имеет отличное от него решение , так как и = . Следовательно, чтобы система (2) имела единственное решение, должно выполняться условие *z* = 0. Тогда система (2) имеет вид:

(3)

Так как левая часть третьего уравнения системы (3) имеет смысл, то должно выполняться условие . Этому условию удовлетворяет единственный корень первого уравнения системы (3): *x* = 0, но тогда Итак, чтобы система (1) имела единственное решение, должно выполняться условие

Проверим, действительно ли при система (1) имеет единственное решение.

Пусть и тройка чисел решение — решение системы (1), которая имеет вид:

(4)

Система (4) имеет решение (0; 0; 0), докажем, что оно единственное. Из второго уравнения системы (4) следует, что точка принадлежит сфере с центром *A* (1; 1; 0) и радиусом в системе координат *Oxyz*. Радиус *OA* сферы перпендикулярен оси *z*, прямой *y* = –*x* плоскости *xy*, следовательно, радиус *OA* перпендикулярен плоскости *x* + *y* = 0, делящей пространство на два полупространства, одному из которых принадлежат все точки сферы, кроме точки *O* (0; 0; 0), принадлежащей границе полупространства. Итак, точка принадлежит плоскости *x* + *y* = 0 или лежит в том же полупространстве, что и центр сферы *A*.

С другой стороны, из третьего уравнения системы (4) следует,   
что = 0, т. е. тройка чисел удовлетворяет неравенству 0, это означает, что точка лежит с центром сферы в разных полупространствах или на границе этих полупространств, то есть принадлежит плоскости *x* + *y* = 0.

Так как точка не может лежать одновременно в разных полупространствах, то она принадлежит плоскости *x* + *y* = 0. Но единственная точка сферы, принадлежащая на этой плоскости (0; 0; 0). Это означает, что при система (4), а значит, и система (1) имеют единственное решение.

Выражаю благодарность нашему внимательному читателю А. В. за консультацию по поводу доказательства единственности решения системы (4) в задании **79**.

**Вместо послесловия. О пользе внимательного чтения**

Если зададим пятиклассникам вопрос: «Сколько месяцев в году содержат 30 дней?», то, скорее всего, получим неправильный ответ: «4 месяца». А правильный ответ: «11 месяцев», так как все месяцы, кроме февраля, содержат 30 дней, некоторые из них даже 31. Задачи на точное понимание написанного полезно давать уже в 5 классе. Не зря этот вопрос мы с И.Ф. Шарыгиным включили в книжку «Задачи на смекалку»[[1]](#footnote-1).

Беда заключается в том, что похожие ошибки иногда совершают не только учителя, но и авторы пособий для учителей. Рассмотрим задачу из свежего сборника для подготовки к ЕГЭ-2018, которую мне прислал учитель математики Назаров М.Г. с недоумённым вопросом по поводу неверного ответа. Это задача 18 из варианта 21.

**78.** Найдите все значения параметра *a*, при которых область определения функции

(1)

содержит три или четыре целых числа. [7-21]

Сначала отметим, что задание сформулировано не совсем удачно, так как достаточно было бы сказать «содержит три целых числа» или «содержит не меньше трёх целых чисел». Неточность формулировки говорит о том, что, возможно, авторы имели в виду «ровно три или ровно четыре целых числа». Тогда более точно задачу надо было бы формулировать так.

**79.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых область определения функции (1) содержит **ровно** 3 или **ровно** 4 целых числа.

Начнём с решения задачи **78**.

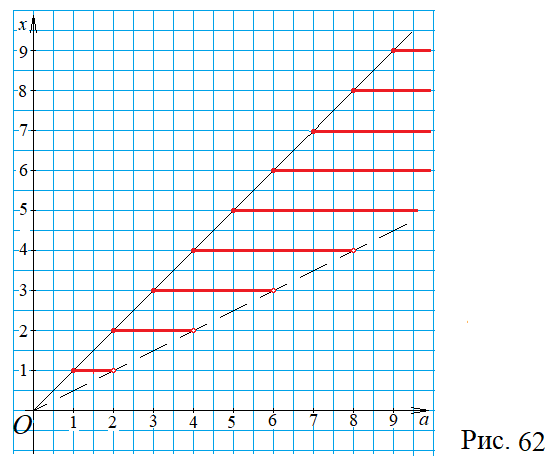
**Решение.** Область определения функции (1) состоит из всех решений системы неравенств:

решениями которой являются все положительные числа *x* из полуинтервала

. (2)

При этом *a* > 0, так как в противном случае или (при *a* = 0), или < (при *a* < 0). В обоих случаях неравенство (2) не имеет решений.

На оси абсцисс будем откладывать значения *a*, на оси ординат — значения *x*. Тогда каждому значению *a* будет соответствовать полуинтервал значений *x*, удовлетворяющих неравенству (2).

Построим график функций *x* = *a* и *x* = — первый сплошной линией, второй пунктирной. Горизонтальными линиями красного цвета изобразим точки (*a*; *x*) координатной плоскости *aOx*, для которых выполняется двойное неравенство (2) и значение *x* целое (рис. 62).

Двойное неравенство (2):

* не имеет целых решений для каждого *a*, такого, что 0 < *a* < 1;
* имеет единственное целое решение для каждого *a*, такого, что 1 ≤ *a* < 3;
* имеет ровно два целых решения для каждого *a*, такого, что 3 ≤ *a* < 5;
* имеет ровно три целых решения для каждого *a*, такого, что 5 ≤ *a* < 7;
* имеет ровно четыре целых решения для каждого *a*, такого, что 7 ≤ *a* < 9;
* имеет не меньше пяти целых решений для каждого *a*, такого, что *a* > 9.

Правильно понимаемый вопрос задачи **78** требует ответа *a* ≥ 5. Ответ же к задаче **79** другой: 5 ≤ *a* < 9.

В сборнике приведён ответ [5; 9), значит, авторы имели в виду «ровно три или ровно четыре целых числа», то есть они решали не задачу **78**, а задачу **79**.

**Ответы**

**5.** *x* = 0 при *a* = 0. **26.** а) –3 ≤ *a* < 3; *a* = 5; б) 3 ≤ *a* < 5. **30.** – ≤ *a* ≤ .   
**32.** –1 – *a* . **35.** *k* **47.** *a* = 1.   
**48.** 1 *a* 2. **49.** –1 *a* < 1; *a* = 2. **51.**  < *a* ≤ ; *a* < .   
**57.** *x* = 0 при *a* = 0 или *a* = 1. **77.** Можно,.

**Литература**

**1. ЕГЭ-2017** : Математика : 30 тренировочных вариантов экзамена­ционных работ для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под. ред. И.В. Ященко. М.: АСТ, 2017. – 135 с.

**2. ЕГЭ-2017** : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под. ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.

**3. Математика.** Подготовка к ЕГЭ-2017. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2017 года / под ред. Ф. Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. Ростов-на-Дону: ООО «Легион», 2016. – 376 с.

**4.** **ЕГЭ.** Практикум по математике: подготовка к выполнению части C / И.Н. Сергеев, В.С. Панферов. — М.: Издательство «Экзамен», 2012. — 126 [2] с. (Серия «ЕГЭ. Практикум»).

**5.** **Сергеев, И.Н.** Математика. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. — 4-е изд. – М.: КДУ; Высшая школа, 2003. – 336 с.

**6.** Козко А. И., Панферов В. С., Сергеев И. Н., Чирский В.Г. ЕГЭ 2011. Математика. Задача С5. Задачи с параметром /Под ред. А. Л. Семенова и   
И. В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2011. – 144 с.

**7. ЕГЭ 2018.** Математика. Профильный уровень. Эксперт в ЕГЭ / Л.Д. Лаппо, М.А. Попов. — М.: Издательство «Экзамен», 2018. — 335 [1] с. Серия «Эксперт в ЕГЭ».

1. Эта книжка входит в учебно-методический комплект «Математика, 5-6» серии «МГУ–школе». [↑](#footnote-ref-1)