**А.В. Шевкин**

**Задачи 19 из ЕГЭ по математике. От простого к сложному**

**Предисловие**

Задачи 19 из последней версии ЕГЭ пришли на смену задачам 21, которые раньше были задачами С6. Это задачи, в которых зачастую нужно совсем не много математики, но надо проявить умение рассуждать, выбирать ситуации, удовлетворяющие условиям задачи, или доказывать, что такие ситуации невозможны, выполнять некоторые действия и следить за изменениями величин и т. п. За время, прошедшее с отмены устного экзамена по геометрии и потраченное на «растворение» курса «геометрия» в курсе «математика», школьники заметно утратили умение рассуждать и доказывать. Поэтому уровень сложности последнего задания ЕГЭ по математике заметно снизился по сравнению с задачами С6.

Решить задачу 19 на ЕГЭ удастся не всякому выпускнику, но стоит попытаться набрать дополнительные баллы, ответив хотя бы на один из вопросов этой задачи. Некоторые из них весьма простые.

Задачи в книжке разнообразны по сюжетам, они расположены согласно названию: от простого к сложному — от темы к теме и от задачи к задаче внутри темы. Решения задач описаны подробно с целью обучения, но на экзамене на вопрос «можно ли…?» достаточно привести пример и объяснить, почему он удовлетворяет условиям задачи. А вот невозможность привести пример придётся доказывать.

Источники задач — сборники [1] – [2]. После каждой задачи указаны номер сборника и варианта. Например, [2-20] — сборник 2, вариант 20. Чтобы разнооб­разить сюжеты задач и применяемые при их решении приёмы, в книжку добавлены подготовительные и специально составленные задачи, они помечены звёздочкой [\*], добавлена задача из демонстрационного варианта 2017 года.

Решая задачи, связанные одним сюжетом, постараемся избегать однотипных решений задач, разбирая их только в том случае, когда можно показать разные способы решения или разную степень подробности обоснования решения. Для ориентирования в сюжетах задач их список разбит на части, заголовки которых раскрывают тематику следующих за ними задач.

Последний вопрос, который надо обсудить в предисловии, звучит так: «Как работать с этой книжкой?» Ответ на него прост.

1) Пытайтесь решить каждую прочитанную задачу (более простые встречаются раньше). В случае неудачи постарайтесь продвинуться в решении как можно дальше. Получение неполного результата даёт баллы на ЕГЭ.

2) Если не получилось решить задачу самостоятельно, то разберите решение по книжке и постарайтесь понять, что вызвало ваше затруднение, где была допущена ошибка.

3) Попробуйте решить похожую задачу самостоятельно.

**1. Покупка в пределах заданной суммы**

Начнём с задач, не требующих из математики ничего выше курса начальной школы. Здесь требуется уметь вычислить стоимость покупки, соблюдая условия задачи.

**1.1.** Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях? [2-20]

**Решение.** а) Попробуем купить 32 карандаша, соблюдая условия задачи. Запишем количества карандашей и стоимость покупки в таблицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Число красных карандашей  I | Число синих карандашей  II | Стоимость покупки  III |
| 16 | 16 | 16∙**17** + 16∙**13** = 480 |

С первой попытки мы уложились в отведённую сумму (условия потратить все деньги в задаче нет). Ответ на вопрос: да.

б) Попробуем купить 35 карандашей:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| I | II | III |
| 15 | 20 | 15∙**17** + 20∙**13** = 515 |

Чтобы уменьшить сумму покупки, надо уменьшить число красных и увеличить число синих карандашей, но тогда разность их количеств превысит 5. Ответ на вопрос: нет.

в) Попробуем увеличить число карандашей, купленных в пункте *а*. Можно потратить ещё 13 рублей на синий карандаш.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| I | II | III |
| 16 | 17 | 16∙**17** + 17∙**13** = 493 |

Замена дешёвых карандашей дорогими не может увеличить число карандашей, так как сумма 13 рублей на покупку ещё одного синего карандаша появится только после замены трёх красных карандашей на три синих, но тогда разность их количеств превысит 5.

Итак, наибольшее число купленных карандашей 16 + 17 = 33.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 33.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**1.2.** Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше, чем на пять.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить? [2-27]

**2. Учитель пишет примеры на сложение…**

Здесь также требуются минимальные познания из математики. Что-то на уровне 5 класса. Требуется уметь складывать три числа, выбирать различные числа и вычислить сумму нескольких последовательных натуральных чисел. Сильные пятиклассники умеют это делать до изучения арифметической прогрессии. Правда, ещё требуется уметь рассуждать…

**2.1.** Учитель пишет примеры на сложение трёх натуральных чисел так, чтобы во всех примерах ответ был один и тот же *N*, при этом он хочет, чтобы все слагаемые во всех примерах (даже в различных примерах) были различны.

а) Можно ли написать два таких примера, если *N* = 12?

б) Можно ли написать 5 таких примеров, если *N* = 40?

в) Можно ли написать 10 таких примеров, если *N* = 40? [1-7]

**Решение.** а) Можно: 1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7 = 12.

б) Можно:

1 + 2 + 37 = 3 + 4 + 33 = 5 + 6 + 29 = 7 + 8 + 25 = 9 + 10 + 21 = 40.

в) Требуется подобрать 10 троек натуральных чисел, дающих в сумме 40. Если это осуществимо, то сумма всех 30 чисел должна быть равна 400. Но даже наименьшие 30 натуральных чисел — от 1 до 30 — дают в сумме 456, что больше 400. Поэтому составить 10 сумм нельзя.

**Ответ.** а) Да; б) да; в) нет.

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**2.2.** Учитель пишет примеры на сложение трёх натуральных чисел так, чтобы во всех примерах ответ был один и тот же *N*, при этом он хочет, чтобы все слагаемые во всех примерах (даже в различных примерах) были различны.

а) Можно ли написать два таких примера, если *N* = 13?

б) Можно ли написать 6 таких примеров, если *N* = 44?

в) Можно ли написать 11 таких примеров, если *N* = 44? [1-8]

**2.3.** Учитель пишет примеры на сложение трёх натуральных чисел так, чтобы во всех примерах ответ был один и тот же *N*, при этом он хочет, чтобы все слагаемые во всех примерах (даже в различных примерах) были различны.

а) Можно ли написать 10 таких примеров, если *N* = 100?

б) Можно ли написать 12 таких примеров, если *N* = 111?

в) Найдите наибольшее возможное число таких троек натуральных чисел, если *N* = 111? [\*]

**========================================================**

**3. Переворачиваем карточки**

**3.1.** Имеется 8 карточек. На них записывают по одному числа –1, 2, 4, –6, 7, –8, –10, 12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел –1, 2, 4, –6, 7, –8, –10, 12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться? [2-14]

**Решение.** а) Ни на одной из карточек нельзя получить сумму 0, так как в предложенном списке чисел нет противоположных чисел. Поэтому получить нуль при умножении восьми сумм невозможно. Ответ на вопрос: нет.

б) Так как все возможные суммы целые, то произведение 1 можно получить лишь в том случае, если можно составить 4 суммы с модулем 1, но таких сумм можно составить только три: –1 + 2, –6 + 7, –8 + 7. Ответ на вопрос: нет.

в) Для каждого из чисел предложенного списка (1-я строка таблицы) подберём число из того же списка чисел (2-я строка таблицы), чтобы их сумма имела наименьший модуль.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| –1 | 2 | 4 | –6 | 7 | –8 | –10 | 12 |
| 2 | –1 | –6 | 4 | –8 | 7 | 12 | –10 |

Вычислим суммы чисел на карточках (по столбцам таблицы) и произ­ведение этих сумм: 1∙1∙(–2)∙(–2)∙(–1)∙(–1)∙2∙2 = 16.

**Ответ.** а) Нет; б) нет; в) 16.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**3.2.** Имеется 8 карточек. На них записывают по одному числа –191, 192, 193, –194, –195, 197, –198, 199. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел –191, 192, 193, –194, –195, 197, –198, 199. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 101?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться? [1-29]

**========================================================**

**4. Натуральное число и сумма его цифр**

**4.1.** а) Приведите пример натурального числа, которое в 12 раз больше суммы своих цифр.

б) Существует ли число, которое в 11 раз больше суммы своих цифр?

в) Найдите все натуральные числа, которые в 1812 раз больше суммы своих цифр. [1-16]

**Решение.** а) Перебирая числа, кратные 12, находим, что 12 ∙ 9 = 108 — число 108 в 12 раз больше суммы своих цифр.

б) Перебирая числа, кратные 11, находим, что 11 ∙ 18 = 198 — число 198 в 11 раз больше суммы своих цифр.

в) Чтобы не заниматься долгим перебором, заметим, что если число *a* в 1812 раз больше суммы своих цифр *S*(*a*), то из равенства *a* = 1812 ∙ *S*(*a*) следует, что число *a* делится на 3. Тогда его сумма цифр *S*(*a*) тоже делится на и 3. Так как и *S*(*a*), и 1812 делятся на 3, то число *a* делится на 9, из чего следует, что сумма цифр *S*(*a*)числа *a* делится на 9.

Умножая число 1812 на числа, кратные 9, сравним в каждом случае сумму цифр получаемого числа со вторым множителем:

*a* = 1812 ∙ 9 = 16308, *S*(*a*) > 9;

*a* = 1812 ∙ 18 = 32616, *S*(*a*) = 18;

*a* = 1812 ∙ 27 = 48924, *S*(*a*) = 27;

*a* = 1812 ∙ 36 = 16308, *S*(*a*) < 36;

*a* = 1812 ∙ 45 = 81540, *S*(*a*) < 45.

Далее сумма цифр *S*(*a*)числа *a* произведения остаётся меньше второго множителя, поэтому таких чисел всего два.

**Ответ.** а) 108; б) да, например, 198; в) 32616, 48924.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**4.2.** а) Приведите пример натурального числа, которое в 19 раз больше суммы своих цифр.

б) Существует ли число, которое в 17 раз больше суммы своих цифр?

в) Найдите все натуральные числа, которые в 1917 раз больше суммы своих цифр. [\*]

**========================================================**

**5. Построение солдат**

**5.1.** В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат? [2-9]

**Решение.** Пусть в первом взводе *a* солдат, а во втором — *b* солдат, *a* и *b —* натуральные числа, *a* < *b*, *a* ≥ 47, *b* ≥ 48, *a* + *b* ≤ 110. Следовательно, *a* и *b* удовлетворяют неравенствам:

47 ≤ *a* ≤54, 48 ≤ *b* ≤ 63, *a* + *b* ≤ 110. (1)

Верхняя граница для числа *a* получена из неравенства *a* + *b* ≤ 110 при условии, что *b* = *a* + 1. Из неравенства *a* + *a* + 1 ≤ 110 следует, что *a* ≤ 54.

а) Будем строить солдат по 9 в ряд. Так как в ряду нет солдат другого взвода, то число солдат каждого взвода делится на 9. Из неравенств (1) следует, что в 1-м взводе может быть лишь 6∙9 = 54 солдата, а во 2-м взводе их должно быть больше: 7∙9 = 63. Но так как 54 + 63 > 110, то солдат нельзя построить по 9 в ряд.

Будем строить солдат по 10 в ряд. Из неравенств (1) следует, что в   
1-м взводе может быть лишь 5∙10 = 50 солдат, но тогда во 2-м взводе их должно быть больше: 6∙10 = 60 солдат, 50 + 60 = 110. Следовательно, солдат можно построить по 10, в этом случае в 1-м взводе 50, во 2-м — 60 солдат.

б) Будем строить солдат по 13 в ряд. Из неравенств (1) следует, что в 1-м взводе может быть лишь 4∙13 = 52 солдата, но тогда во 2-м взводе их должно быть больше: 5∙13 = 65 солдат, что больше 63. Следовательно, солдат нельзя построить по 13 в ряд.

в) Рассмотрим оставшиеся случаи.

Из неравенств (1) следует, что солдат 1-го взвода, а значит и всех солдат, нельзя построить по 11 в ряд.

Будем строить солдат по 12 в ряд. Из неравенств (1) следует, что в   
1-м взводе может быть 4∙12 = 48 солдат, тогда во 2-м взводе солдат должно быть больше: 5∙12 = 60 солдат, 48 + 60 = 108. Следовательно, солдат можно построить по 12 в ряд, в роте 48 + 60 = 108 солдат.

При дальнейшем увеличении числа солдат в ряду не выполняется хотя бы одно из неравенств (1), следовательно, в роте могло быть только 110 или 108 солдат.

**Ответ.** а) 50 и 60; б) нет; в) 110 или 108.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**5.2.** В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат одном ряду?

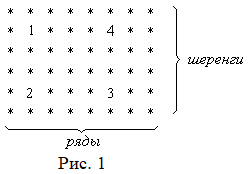
в) Сколько в роте может быть солдат? [2-30]

**========================================================**

Следующая задача про построение солдат не имеет отношения к ЕГЭ, она из конкурсного набора в выпускной 10 класс (зима, 1966/67) в среднюю школу-интернат физико-математического профиля № 18 при МГУ им. М.В. Ломоносова (ныне СУНЦ им. А.Н. Колмогорова). Но сравнение самого высокого из низких с самым низким из высоких подготовит нас к пониманию следующих задач.

**5.3.** Солдат построили не по росту, но с чётким разделением на ряды и шеренги. В каждом ряду выбрали самого высокого, а из всех высоких — самого низкого. В каждой шеренге выбрали самого низкого, а из всех низких — самого высокого. Кто же выше ростом: самый низкий из высоких или самый высокий из низких?

**Решение.** Рассмотрим случаи, когда два выбранных солдата стоят:   
а) в одном ряду; б) в одной шеренге; в) в разных рядах и шеренгах.

а) Пусть два выбранных в соответствии с условиями задачи солдата стоят в одном ряду: солдат 1 — самый низкий из высоких, солдат 2 — самый высокий из низких (рис. 1). Так как в каждом ряду выбирали самого высокого (он оказался самым низким из высоких), то в этом ряду солдат 1 выше всех, значит, выше солдата 2. Итак, в этом случае самый низкий из высоких выше самого высокого из низких.

б) Если же два выбранных солдата стоят в одной шеренге: солдат 2 — самый низкий из высоких, солдат 3 — самый высокий из низких (рис. 1). Так как в каждой шеренге выбирали самого низкого (он оказался самым высоким из низких), то в этой шеренге солдат 3 ниже всех, значит, ниже солдата 2. И в этом случае самый низкий из высоких выше самого высокого из низких.

в) Пусть теперь два выбранных солдата стоят в разных рядах и разных шеренгах: солдат 1 — самый низкий из высоких, а солдат 3 самый высокий из низких. Так как в шеренге выбирали самого низкого, то солдат 3 ниже солдата 2. Но в каждом ряду выбирали самого высокого, следовательно, солдат 2 ниже солдата 1. Итак, солдат 3 ниже солдата 2, а солдат 2 ниже солдата 1, следовательно, солдат 3 ниже солдата 1.

Таким образом, и в этом случае самый низкий из высоких выше самого высокого из низких.

Случай, когда солдат 3 оказался самым низким из высоких, а солдат 1 самым высоким из низких, рассматривается аналогично, только сравнивать рост солдат 1 и 3 надо с ростом солдата 4.

**Ответ.** Самый низкий из высоких выше самого высокого из низких.

**6. Наибольшее из наименьших и наименьшее из наибольших**

**6.1.** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифме­тических?

в) Найдите наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [\*]

**Решение.** а) Могут, например, в двух группах с разным количеством чисел (1, 2, 12) и (4, 6).

б) Могут, средние арифметические в трёх группах (3, 7), (4, 5, 6) и   
(1, 2, 12) равны.

в) Так как три средние арифметические могут быть равны друг другу, то наибольшее возможное значение наименьшего из них будет меньше среднего арифметического восьми чисел, то есть числа 5.

Так как в группе не может быть больше шести чисел, то искомое число надо искать среди чисел вида 4 + , где *n* — натуральное число, не превышающее 6.

Выясним, может ли искомое число быть равным4 = . Оказывается, может. Сумма 6 чисел должна быть равна 29, в неё входят 1, 2, 3, 4, 7, 12, оставшиеся числа 5 и 6 образуют две группы, средние арифметические которых больше, чем Следовательно, наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических равно

**Ответ.** а) Да; б) да; в) .

**6.2.** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифме­тических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [2-10]

**Решение.** а) Могут, например, в двух группах с разным количеством чисел (2, 16) и (9).

б) Не могут, так как если средние арифметические в трёх группах чисел равны *x*, то сумма всех чисел равна 61 и равна

*nx* + *mx* + *kx* = (*n* + *m* + *k*)*x* = 10*x*,

где *n*, *m*, *k* — количество чисел в этих группах. Тогда *x* = 6,1, но такое среднее арифметическое можно получить, имея не меньше 10 чисел в каждой группе, а у нас всего 10 чисел.

в) Так как три средние арифметические не могут быть равны друг другу, то наименьшее возможное значение наибольшего из них будет больше среднего арифметичес­кого десяти чисел, то есть числа 6,1.

Так как в группе не может быть больше восьми чисел, то начнём проверку с числа 6. Если искомое число может быть равным6 = , то в этой группе 8 чисел и их сумма равна 49. Сумма двух оставшихся чисел должна быть равна 61 – 49 = 12. Так как средние арифметические в двух группах по одному числу должны быть меньше 6,1, то это могут быть числа не больше, чем 6, сумма которых меньше 12, следовательно, среднее арифметическое 6получить невозможно.

Среднее арифметическое 6 получить можно, так как

= 6

и средние арифметические чисел из двух групп (6) и (5, 7) меньше, чем 6.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 6.

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**6.3.** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 13 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифме­тических?

в) Найдите наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [\*]

**6.4.** Числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 19 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифме­тических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [\*]

**========================================================**

**7. Чётность, нечётность, делимость, простые числа**

**7.1.** В ряд выписаны числа: 12, 22, …, (*N* – 1)2, *N*2. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «–» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если *N* = 12?

б) 0, если *N* = 70?

в) 0, если *N* = 48?

г) –3, если *N* = 90? [1-3]

**Решение.** а) Сначала выпишем 12 членов последовательности и под каждой парой запишем разность, которую можно получить, вычитая предыдущий член последовательности из последующего:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144.

3, 7, 11, 15, 19, 23

Попробуем из полученный членов арифметической прогрессии составить сумму 12. Если получится, то мы узнаем, какие знаки нужно поставить между квадратами чисел. Так как –3 + 7 – 11 + 15 – 19 + 23 = 12, то число 12 можно получить, чередуя знаки следующим образом:

1 – 4 – 9 + 16 + 25 – 36 – 49 + 64 + 81 – 100 – 121 + 144.

12 – 22 – 32 + 42 + 52 – 62 – 72 + 82 + 92 – 102 – 112 + 122 = 12.

Ответ на вопрос: да.

б) Предположим, что при некоторой расстановке знаков верно равенство:

12 ± 22 ± 32 ± … ± 692 ± 702 = 0. (1)

Заметим, что в левой части равенства (1) 35 чётных чисел и 35 нечётных, их сумма нечётная при любой расстановке знаков. Равенство (1) неверно при любой расстановке знаков. Ответ на вопрос: нет.

в) Разобьём 48 членов последовательности

12, 22, 32, …, 472, 482  (2)

на 6 восьмёрок последовательных квадратов натуральных чисел. В каждой такой восьмёрке можно получить нуль, применяя к каждой паре слагаемых формулу разности квадратов:

*n*2 – (*n* + 1)2 – (*n* + 2)2 + (*n* + 3)2 – (*n* + 4)2 + (*n* + 5)2 + (*n* + 6)2 – (*n* + 7)2 =  
= –2*n* – 1 + 2*n* + 5 + 2*n* + 9 – 2*n* – 13 = 0.

Получим нуль в каждой из шести восьмёрок:

12 – 22 – 32 + 42 *–* 52 + 62 + 72 – 82 = 0,

92 – 102 – 112 + 122 *–* 132 + 142 + 152 – 162 = 0,

…

412 – 422 – 432 + 442 *–* 452 + 462 + 472 – 482 = 0.

Сложив полученные равенства, получим расстановку знаков, дающую в сумме нуль.

г) Так как 12 – 22 = –3, а остальные 88 членов последовательности разбиваются на восьмёрки, каждая из которых описанным выше способом обращается в нуль, то сумму –3 получить можно.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) да; г) да.

**7.2.** Произведение нескольких различных простых чисел делится на каждое из этих чисел, уменьшенное на 1. Чему может быть равно это произведение? [1-24]

**Решение.** а) Произведение может быть равно 2 ∙ 3 = 6 — произведение 6 делится и на 1, и на 2.

Так как 6 = 7 – 1 и 7 — простое число, то произведение может быть равно 2 ∙ 3 ∙ 7 = 42.

Так как 42 = 43 – 1 и 43 — простое число, то произведение может быть равно 2 ∙ 3 ∙ 7 ∙ 43 = 1806.

**Ответ.** 6, 42, 1806.

**7.3.** Натуральные числа *m* и *n* таковы, что и *m*3 + *n*, и *m*+ *m*3 делятся на *m*2 + *n*2. Найдите *m* и *n*. [1-27]

**Решение.**Так как каждое из чисел *т*3 *+ п* и *т + т*3делится на *т*2 *+ п*2, то их разность *т* – *п* тоже делится на *т*2 *+ п*2, т. е. справедливо равенство

*т* – *п* = *x*(*т*2 *+ п*2), (1)

где *x* — целое число.

Если *т* > *п*, то *x* — натуральное число и справедливы неравенства   
*т*2> *т*, *п*2 *≥ п*, *т*2+ *п*2 *> т + п > т – п* и равенство (1) невозможно.

Если *т* < *п*, то верно равенство

*п – т* = –*x*(*т*2 *+ п*2), (2)

где *–x* — натуральное число.

Так как для натуральных чисел *т* и *п* справедливы неравенства *т*2≥ *т*, *п*2 *> п*, *т*2+ *п*2 *> т + п > п – т*, то равенство (2) невозможно.

Следовательно, *m* = *n*. Перепишем условие задачи «*т + т*3делится на *т*2 *+ п*2», т. е. на 2*т*2 в виде

*т + т*3 = 2*yт*2, (3)

где *y* — натуральное число.

Разделив равенство (3) на натуральное число *m*, получим равенство

1 *+ т*2 = 2*yт*,

которое перепишем в виде

(2*y – т*)*т* = 1. (4)

Для натуральных чисел *m* и 2*y – т* равенство (4) верно лишь при условии *m* = 1 и *y* = 1. Мы получили единственное решение задачи:   
*m = n* = 1.

**Ответ.** *m* = *n* = 1.

**8. На доске написали натуральные числа…**

**8.1.** На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 396. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 25 заменили на число 52).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел. [\*]

**Решение.** а) В группе чисел 14, 14, 14, 14, 14, 14, 15 после перестановки цифр сумма увеличится в 3 раза — с 99 до 297. Возьмём четыре такие группы чисел, их сумма 396, а сумма чисел, полученных после перестановки цифр, в 3 раза больше.

Здесь использованы двузначные числа, у которых увеличение числа при перестановке его цифр близко к трём: у числа 14 — в 2 раза, у числа 15 — в 3,4 раза. Далее составляли из них группу двузначных чисел, у которой при перестановке цифр сумма чисел увеличится ровно в 3 раза.

б) Если взять числа 12, 12, 12, 12, 12, 13, 13, 13, сумма которых 99, то после перестановки цифр сумма получившихся чисел 198 будет в 2 раза больше, чем 99. Сумма чисел в четырех таких группах равна 396, а после перестановки цифр — в 2 раза больше. Ответ на вопрос: да.

в) Наибольшее увеличение двузначного числа при перестановке его цифр у числа 19 — в раза. Так как 396 = 20 ∙ 19 + 16, то возьмём 20 чисел 19 и 1 число 16. После переста­новки цифр получим числа, сумма которых равна 20 ∙ 91 + 1 ∙ 61 = 1881. Увеличить сумму получившихся чисел с тем же их количеством нельзя. Например, замена суммы 19 + 16 на равную ей сумму 18 + 17 не меняет суммы чисел после перестановки цифр, так как 91 + 61 = 81 + 71.

Если же мы будем увеличивать количество чисел в группе с постоянной суммой 363, то в ней уменьшится количество чисел 19, а сумма цифр, полученная после перестановки цифр, окажется меньше, чем 1881. Это означает, что сумма 1881 — наибольшая.

**Ответ.** а) 24 числа 14 и 4 числа 15; б) да; в) 1881.

**8.2.** На доске было написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел. [2-42]

**Решение.** а) В группе чисел 12, 13, 18, 18, 19, 19 после перестановки цифр сумма увеличивается в 4 раза — с 99 до 396. В группе чисел 15, 16, 17, 18 после перестановки цифр сумма тоже увеличивается в 4 раза — с 66 до 264. Возьмём три первых группы чисел и одну вторую. Первоначальная сумма чисел составит 99 ∙ 3 + 66 = 363, а после перестановки цифр — она станет в 4 раза больше.

б) Пусть существует группа двузначных натуральных чисел, в которой после перестановки цифр сумма чисел группы удваивается. Пусть сумма цифр десятков всех чисел группы равна *a*, а сумма цифр единиц всех чисел группы равна *b*. Тогда 10*a* + *b* = 363, а 10*b* + *a* = 726. Вычтем из второй суммы чисел первую, получим равенство: 9*b* ­– 9*a* = 363. Левая часть равенства делится на 9, а правая — нет, что невозможно. Ответ на вопрос: нет.

в) Наибольшее увеличение двузначного числа при перестановке его цифр у числа 19 — в раза, затем у числа 18 — в 4,5 раза. Возьмём 3 числа 19 и 17 чисел 18. После перестановки цифр получим числа, сумма которых равна 3 ∙ 91 + 17 ∙ 81 = 1650. Увеличить сумму получившихся чисел с тем же их количеством нельзя. Например, замена суммы 19 + 16 на равную ей сумму 18 + 17 (и наоборот) не меняет суммы чисел после перестановки цифр, так как 91 + 61 = 81 + 71.

Если же мы будем увеличивать количество чисел в группе с постоянной суммой 363, то в ней уменьшится количество чисел 19 и 18, а новая полученная сумма чисел окажется меньше, чем 1650. Это означает, что сумма 1650 — наибольшая.

**Ответ.** а) Три раза 12, 13, 18, 18, 19, 19 и 15, 16, 17, 18; б) нет; в) 1650.

Сюжет задачи меняется, но опять пишем натуральные числа на доске.

**8.3.** На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) на доске написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске увеличилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 34?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 27. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске. [2-29]

**Решение.** а) Если первоначально на доске записали 3, 1 и восемнадцать чисел 2, то их сумма равна 40, а среднее арифметическое равно 2. Уменьшим одну единицу на 1 и сотрём полученный 0 — получится 19 чисел, их сумма равна 39, а среднее арифметическое равно > 2. Ответ на вопрос: да.

б) Пусть написали 20 чисел, среднее арифметическое которых равно 27, тогда их сумма 540. Среди них должны быть единицы — иначе не удастся повысить среднее арифметическое группы чисел после стирания нулей. Пусть на 1 уменьшили *x* единиц. После описанной процедуры количество чисел в группе и их сумма уменьшились на *x*. Учитывая, что среднее арифметическое полученной группы чисел равно 34, составим уравнение:

= 34.

Так как уравнение не имеет натурального корня, то получить среднее арифметическое 34 не удастся.

в) По условию задачи среднее арифметическое данных 20 чисел равно 27, тогда их сумма 540. Наибольшее среднее арифметическое можно получить, если среди данных чисел будет наибольшее возможное число единиц. Возьмём 6 троек чисел 40, 40, 1 и два числа 27. Среднее арифметическое 20-ти чисел равно 27. Получить больше единиц нельзя. Из шести единиц получим нули и сотрём их, останется 14 чисел, среднее арифметическое которых равно = 38, увеличить его нельзя.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 38.

**8.4.** На доске было написано 30 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 7. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньшее первоначального. Числа, которые после этого оказались меньшими 1, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, больше 14?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 12, но меньше 13?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметичес­кого чисел, которые остались на доске. [1-18]

**Решение.** а), в). Найдём наибольшее среднее арифметическое, которое можно получить в предложенном преобразовании 30 чисел. Для этого надо взять как можно больше чисел 1 для первоначальной суммы, после преобразования полученные числа 0,5 заменим нулями, сократив число слагаемых.

Пусть было 4 числа 40, 1 число 25, 25 чисел 1. После деления всех чисел на 2 получим и стирания чисел, меньших 1, получим: четыре числа 20 и одно число 12,5, их среднее арифметическое равно = 18,5 > 14. Увеличить среднее арифметическое нельзя, так как нельзя увеличить количество единиц в первоначальной группе чисел.

б) Так как среднее арифметическое 30 чисел равно 7, то сумма этих чисел равна 210. Пусть среди них было *x* чисел, больших 1, и 30 – *x* единиц. Тогда среднее арифметическое чисел, оставшихся после преобразования, равно . Но двойное неравенство

12 < < 13

не имеет натуральных решений, следовательно, среднее арифметическое оставшихся на доске чисел, не может оказаться больше 12, но меньше 13. Ответ на вопрос: нет.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 18,5.

**8.5.** На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно –3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно –8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них? [ЕГЭ, 2017, демоверсия]

**Решение.** а) Пусть было *x* положительных чисел, *y* отрицательных чисел и *z* нулей, тогда сумма всех положительных чисел 4*x*,отрицательных чисел –8*y* инулей — 0. А сумма всех чисел равна –3(*x* + *y* + *z*). Составим уравнение:

4*x* – 8*y* + 0*z* = –3(*x* + *y* + *z*), (1)

из которого следует, что число *x* + *y* + *z* делится на 4.

Так как 40 < *x* + *y* + *z* < 48 и *x* + *y* + *z* делится на 4, то *x* + *y* + *z* = 44, то есть всех чисел было 44.

б) Преобразовав равенство (1), получим, что

7*x* – 5*y* + 3*z* = 0. (2)

Если бы было верно неравенство *x* ≥ *y*, то левая часть равенства (2) была бы положительной, что невозможно, следовательно, *x* < *y*, т. е. положительных чисел меньше, чем отрицательных.

в) Подставим число 44 в уравнение (1), получим, что *x* = 2*y* – 33. Так как *x* + *y* ≤ 44, то из неравенства 3*y* – 33 ≤ 44 получим, что *y* ≤ 25. Тогда   
*x* = 2*y* – 33 ≤ 17. То есть число *x* не превышает 17. Подставив значения *x* = 17, *y* = 25, *z* = 2 в равенство (1), убеждаемся, что этот вариант реализуем, то есть 17 — наибольшее количество положительных чисел.

**Ответ.** а) 44; б) отрицательных чисел больше; в) 17.

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**8.6.** На доске было написано 20 натуральных чисел (не обязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых из чисел (возможно, одного) написали числа, меньшие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 0, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске не изменилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 30. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 32?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 30. Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске. [\*]

**8.7.** На доске написано более 30, но менее 36 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −1, среднее арифметическое всех поло­жительных из них равно 6, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −3.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них? [\*]

**========================================================**

**9. Опросы: проценты и респонденты**

**9.1.** В результате опроса среди шестиклассников выяснилось, что примерно 56 % опрошенных любят математику (число 56 получе­но с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 33 % респондентов любят делать домашнюю работу по математике.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 20 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 36 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе? [\*]

**Решение.** Пусть *a* — число опрашиваемых, респондентов, по-научному. Пусть из них утвердительно ответили на первый вопрос *x* человек, на второй вопрос *— y* человек.

Так как *x* составляет от *a* приближённо 56 %, то это приближение получено, если 0,555*a ≤ x <* 0,565*a*.

Так как *y* составляет от *a* приближённо 33 %, то это приближение получено, если 0,325*a ≤ y <* 0,335*a*.

а) Если *a* = 20, то 0,555∙20 = 11,1 *≤ x <* 0,565∙20 = 11,3. Не существует целое число *x*, удовлетворяющее этим неравенствам. Проверка второго неравенства не нужна. Ответ на вопрос: нет.

б) Если *a* = 36, то 0,555∙36 = 19,98 *≤ x <* 0,565∙36 = 20,34. Существует целое число *x* = 20, удовлетворяющее этим неравенствам.

Проверим выполнение второго неравенства.

0,325∙36 = 11,7 *≤ y <* 0,335∙36 = 12,06. Существует целое число *y* = 12, удовлетворяющее этим неравенствам. Ответ на вопрос: да.

в) Для ответа на третий вопрос выпишем результаты вычисления, аналогичные предыдущим, в виде таблицы. Причём, если для выбранного числа *a* нет целого значения *x* в полученном промежутке, то для *y* выполнять вычисления не нужно.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *a* | 0,555*a ≤ x <* 0,565*a* | 0,325*a ≤ y <* 0,335*a* |
| 1 | 0,555 *≤ x <* 0,565 |  |
| 2 | 1,11 *≤ x <* 1,13 |  |
| 3 | 1,665 *≤ x <* 1,695 |  |
| 4 | 2,22 *≤ x <* 2,26 |  |
| 5 | 2,775 *≤ x <* 2,825 |  |
| 6 | 3,33 *≤ x <* 3,39 |  |
| 7 | 3,885 *≤ x <* 3,955 |  |
| 8 | 4,44 *≤ x <* 4,52 |  |
| 9 | 4,995 *≤ x <* 5,085 | 2,925 *≤ y <* 3,015 |

Как видно из таблицы, последовательно расширяющийся промежуток значений *x* долго не включает в себя целых значений *x*. А при *a* = 9 (это наименьшее значение) существуют целые значения и *x*, и *y*, удовлетворя­ющие неравенствам 0,555*a ≤ x <* 0,565*a* и 0,325*a ≤ y <* 0,335*a*.

**Ответ.** а) Нет; б) да; в) 9.

*Замечание.* Запись вычислений при помощи таблицы удобна тем, что некоторые умножения можно заменять сложением чисел из предыдущих строчек таблицы. Например, границы для *x* при *a* = 3 можно получить сложением границ для *a* = 1 и *a* = 2.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**9.2.** В результате опроса выяснилось, что примерно 58 % опрошенных предпочитают искусственную ёлку натуральной (число 58 получено с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 42 % респондентов никогда не отмечали Новый год не дома.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 40 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 48 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе? [2-1]

**========================================================**

**10. Задачи про футболистов и хоккеистов,   
бутерброды и конфеты, кошек и собак**

**10.1.** Тренер планирует вести спортивные секции для младших и старших школьников: одни будут заниматься футболом, другие — хоккеем, а некоторые могут заниматься и футболом, и хоккеем. Тренер получил указание, согласно которому доля младших школьников среди занимаю­щихся футболом должна быть не меньше , а среди занимающихся хоккеем — не меньше .

а) Сможет ли тренер выполнить указание, если он планирует набрать в секции 16 младших и 14 старших школьников?

б) Какое наименьшее количество младших школьников могут заниматься у тренера, чтобы указание было выполнено, если он может набрать во все секции 30 школьников?

в) Какую наибольшую долю могут составлять старшие школьники, чтобы указание было выполнено, а число занимающихся в секциях можно изменить? [\*]

**Решение.** Вводить буквенные обозначения, составлять уравнения и неравенства здесь не стоит. Решим задачу «по-нашему, по-неучёному», как говаривал Удодов-старший из рассказа А.П. Чехова «Репетитор».

а) Пусть тренер планировал набрать участников секции согласно таблице 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Таблица 1 | Футбол | Футбол и хоккей | Хоккей |
| Младшие – 16 | 3 | 8 | 5 |
| Старшие – 14 | 4 | 8 | 2 |

Сейчас доля младших школьников среди футболистов составляет   
*k*1 = = < , а среди хоккеистов — *k*2 = = < . Чтобы выполнить указание, тренер должен скорректировать план набора в секции. Для увеличения дроби *k*1 нет смысла переводить футболистов из одной группы в другую — от этого дробь *k*1 не изменится. Надо или младших «чистых» хоккеистов переводить в группу футбол-хоккей, или старших хоккеистов из группы футбол-хоккей переводить в «чистые» хоккеисты.

Аналогично для увеличения дроби *k*2 нет смысла переводить хоккеистов из одной группы в другую. Надо или младших «чистых» футболистов переводить в группу футбол-хоккей, или старших футболистов из группы футбол-хоккей переводить в «чистые» футболисты.

Тренер мог изменить план набора участников секций согласно таблице 2.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Таблица 2 | Футбол | Футбол и хоккей | Хоккей |
| Младшие – 16 | 2 | 11 | 3 |
| Старшие – 14 | 9 | 2 | 3 |

Теперь *k*1 = = >, а доля младших школьников среди хоккеистов составляет *k*2 = = > . Ответ на вопрос: да.

б) Чтобы выполнить указание с наименьшим числом младших школьников, тренер должен записать всех младших школьников в секцию футбол-хоккей, а старших школьников в отдельные секции — футбол и хоккей согласно таблице 3.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Таблица 3 | Футбол | Футбол и хоккей | Хоккей |
| Младшие |  | 12 |  |
| Старшие | 12 |  | 6 |

Теперь *k*1 = , а *k*2 = . Уменьшить количество младших школьников не удастся, так как от этого уменьшатся числители и увеличатся знаменатели дробей *k*1 и *k*2.

Покажем, что младших школьников не может быть 11. Пусть было 11 младших школьников и 19 старших школьников. Используя ограничение на *k*1, найдём наибольшее число старших футболистов (*x*). Для этого найдём наибольшее целое решение неравенства: , *x* = 11. Используя ограничение на *k*2, найдём наибольшее число старших хоккеистов (*y*). Для этого найдём наибольшее целое решение неравенства: , *y* = 5, что невозможно, так как 11 + 5 < 19. Младших школьников не может быть и меньше 11.

в) В решении задания *б* получена наименьшая доля младших школьников среди всех участников секций. В этом случае доля старших школьников будет наибольшей. Три числа в таблице 3 можно одновременно увеличить (уменьшить) в *n* раз, сохраняя числа целыми, доля старших школьников от этого не изменится. Она составит =и увеличить её, без нарушения указания невозможно.

**Ответ.** а) Да; б) 12; в) .

**10.2.** За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причём каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то, и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 22 ребёнка?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если до­полнительно известно, что всего за столом было 22 ребёнка?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа де­тей без дополнительного условия пунктов *а* и *б*? [1-19]

**Решение.** а) За столом могло быть 11 мальчиков (см. табл. 4).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Таблица 4 | Бутерброды | Бутерброды и конфеты | Конфеты |
| Мальчики – 11 | 9 |  | 2 |
| Девочки – 11 |  | 11 |  |

Здесь *k*1 = , *k*2 = . Чтобы получить такой результат, можно сначала заполнить таблицу, соблюдая лишь одно условие: сумма чисел в каждой строке равна 11. Затем вычислить *k*1 и *k*2. Если они окажутся больше заданных значений, то для их уменьшения нужно уменьшить среднее число в верхней строке таблицы и увеличить среднее число в нижней строке таблицы.

б) Увеличить число мальчиков до 12, уменьшив на 1 число девочек не удастся, так как при этом нарушится условие на *k*1 или на *k*2:

*k*1 = > или *k*2 = .

Ответ «12» к этому заданию в сборнике [1] дан с ошибкой, покажем это. Пусть было 12 мальчиков и 10 девочек. Используя ограничение на *k*1, найдём наибольшее число мальчиков, евших бутерброды (*x*). Для этого найдём наибольшее целое решение неравенства: , *x* = 8. Используя ограничение на *k*2, найдём наибольшее число мальчиков, евших конфеты (*y*). Для этого найдём наибольшее целое решение неравенства: , *y* = 2, что невозможно, так как 8 + 2 < 12.

в) Девочки составят наименьшую долю от общего числа де­тей, если числа *k*1 и *k*2 принимают наибольшие допустимые значения — = =  
= и = = соответственно. Поэтому девочек должно быть 30 (табл. 6). Все условия задачи выполнены и доля девочек = — наибольшая.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Таблица 6 | Бутерброды | Бутерброды и конфеты | Конфеты |
| Мальчики | 25 |  | 6 |
| Девочки |  | 30 |  |

**Ответ.** а) Да; б) 11; в) .

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**10.3.** У каждого ученика в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, — и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если до­полнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а и б?[1-23]

**========================================================**

**11. Аликвотные дроби**

Аликвотной называют дробь с числителем 1, знаменатель которой натуральное число, большее 1. Примеры аликвотных дробей: , , .

Рассмотрим преобразования, позволяющие представить данную аликвотную дробь в виде суммы двух аликвотных дробей.

П1: ;

П2: ;

П3: .

Поменяв местами *a* и *b* получим вариант преобразования П3:

П4: .

П5: .

Рассмотрим преобразования, позволяющие представить данную аликвотную дробь в виде суммы трёх аликвотных дробей.

П6: ;

П7: ;

П8: .

П9:

*Замечания*. 1. Преобразования П1 – П3 можно получить из преобразо­вания П4, а преобразования П6 – П8 — из преобразования П9.

2. Первоначальный текст раздела «Аликвотные дроби» был опубликован на сайте [www.shevkin.ru](http://www.shevkin.ru) с пропуском преобразования П5, что было замечено внимательным читателем, приславшим не вытекающий из остальных преобразований пример: . Пришлось добавить потерянное преобразование П5 и полученные с его помощью новые ответы в следующих задачах.

**11.1.** Найдите все натуральные числа *a* и *b*, такие, что:

а) = ; б) = ; в) = . [\*]

**Решение.** а) Преобразуем различными способами дробь :

П1: ; П2: .

б) Преобразуем различными способами дробь :

П1: ; П2: .

в) Преобразуем различными способами дробь :

П1: ; П2: ; П3: ;

П3: ; П5: .

**Ответ.** а) {3, 6}; {4, 4}; б) {4, 12}; {6, 6}; в) {7, 42}; {8, 24}; {9, 18}; {10, 15}; {12, 12}.

**11.2.** Найдите все возможные наборы чисел *a*, *b* и *c*, среди которых есть равные и верно равенство:

а) = ; б) = . [\*]

**Ответ.** а) {3, 12, 12}; {4, 8, 8}; {5, 5, 10}; {6, 6, 6}; б) {4, 24, 24};   
{5, 15, 15}; {6, 12, 12}; {7, 7, 21}; {9, 9, 9}.

**11.3.** Четыре натуральных числа *a*, *b*, *c* и *d* таковы, что

. (1)

а) Могут ли все эти числа быть попарно различны?

б) Может ли одно из этих чисел равняться 7?

в) Найдите все возможные наборы таких чисел, среди которых есть равные. [1-6]

**Решение.** а), б) Так как 1 = = + = + , то ответ на вопросы *а* и *б*: да.

в) Используя результаты предыдущих заданий, выпишем все возможные наборы чисел *a*, *b* и *c*, среди которых есть равные и верно равенство (1):

1 = + = + + + ;

1 = + = + ;

1 = + = + + + ;

1 = + = + + = + + + ;

1 = + = + + = + + + ;

1 = + = + + = + + + ;

1 = + = + + + ;

.

**Ответ.** а) Да; б) да; в) {2, 3, 12, 12}; {2, 4, 8, 8}; {2, 5, 5, 10};   
{2, 6, 6, 6}; {3, 3, 4, 12}[[1]](#footnote-1); {3, 3, 6, 6}; {3, 4, 4, 6}; {4, 4, 4, 4}.

**12. Замена членов бесконечной арифметической   
прогрессии суммой их цифр**

**12.1.** Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой 2014, а разность равна 13. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и так действовали до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи членов получившейся последова­тельности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 членов получив­шейся последовательности, идущих подряд? [2-41]

**Решение.** а) Выпишем первые члены арифметической прогрессии и под каждым её членом напишем соответствующий член последователь­ности однозначных чисел, полученный описанным в условии задачи процессом:

2014, 2027, 2040, 2053, 2066, 2079, 2092, 2105, 2118, 2131,… (1)

7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 3, 7,… (2)

Первые 9 членов последовательности (2) далее будут повторяться, так как если у числа найти сумму цифр, а потом то же число увеличить на 9 и находить сумму цифр до получения однозначной суммы цифр, то первоначальная сумма цифр будет равна последней.

Если 9 раз к числу 2014 прибавить 13, то получится тот же результат, как если 13 раз к числу 2014 прибавить 9. После девятого прибавления числа 13 получим число 2131 с той же суммой цифр 7. В последователь­ности (2) так же будут повторяться другие члены.

Среди первых 1000 членов последовательности (2) группа из 9 чисел 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 3 содержится 111 раз, на 1000-м месте стоит первый член последовательности (2), стоящий после 111-й группы, т. е. число 7.

б) Сумма первой тысячи членов последова­тельности (2) равна

111(7 + 2 + 6 + 1 + 5 + 9 + 4 + 8 + 3) + 7 = 5002.

в) Сумма 1010 членов получив­шейся последовательности будет 112 раз содержать сумму, записанную в скобках, и сумму двух следующих за суммой членов. Наибольшая сумма 1010 членов получится, если сумма этих двух членов наибольшая:

112(7 + 2 + 6 + 1 + 5 + 9 + 4 + 8 + 3) + 5 + 9 = 5054.

**Ответ.** а) 7; б) 5002; в) 5054.

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**12.2.** Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой 2011, а разность равна 11. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и так действовали до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи членов получившейся последова­тельности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 членов получив­шейся последовательности, идущих подряд? [1-22]

**12.3.** Дана бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой 2017, а разность равна 11. Каждый член прогрессии заменили суммой его цифр. С полученной последовательностью поступили также и так действовали до тех пор, пока не получилась последовательность однозначных чисел.

а) Найдите тысячное число получившейся последовательности.

б) Найдите сумму первой тысячи членов получившейся последова­тельности.

в) Чему может равняться наибольшая сумма 1010 членов получив­шейся последовательности, идущих подряд? [\*]

**========================================================**

**13. Арифметическая прогрессия с ограничениями   
на использование цифр**

**13.1.** Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72-мя членами. [1-2]

**Решение.** а) Может: 1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46. В десятичной записи 10 членов арифметической прогрессии нет цифры 9.

б) – г) При *a*1 = 1, *d* = 5 в приведённой выше прогрессии происходит циклическое повторение цифр в разряде единиц.

В каждом десятке по два числа, в девяти десятках их 18, а 19-й член прогрессии 91 имеет цифру 9 в разряде десятков.

При *a*1 = 1, *d* = 25 (это 52) происходит ещё и циклическое повторение цифр в разряде десятков: 1, 26, 51, 76, 101, 126, 151, 176, 201, … .

В каждой сотне по 4 члена арифметической прогрессии, в девяти сотнях их 36, а 37-й член прогрессии 901 имеет цифру 9 в разряде сотен.

При *a*1 = 1, *d* = 125 (это 53) к циклическому повторению цифр в разрядах единиц и десятков добавляется цикл цифр в разряде сотен:

1, 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876,   
1001, 1126, 1251, 1376, 1501, 1626, 1751, 1876,

2001, … .

В каждой тысяче содержится по 8 членов арифметической прогрессии, а в девяти тысячах их 72, а 73-й член прогрессии 9001 имеет цифру 9 в разряде тысяч.

При *n* > 3 члены арифметической прогрессии с *a*1 = 1, *d* = 5*n* с цифрой 9 в десятичной записи появляются раньше, поэтому больше 72-х членов получить нельзя. При другом выборе *d* цифра 9 появляется ранее 73 члена прогрессии.

**Ответ.** а) Да; г) *a*1 = 1, *d* = 125.

**13.2.** Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых начинается с цифры 9 и не содержит цифры 0.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72-мя членами. [1-4]

**Решение.** а) Может: 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929. Десятичная запись 10 членов арифметической прогрессии начинается с цифры 9 и не содержат цифру 0.

б) – г) Первые 36 членов арифметической прогрессии с *a*1 = 91111 и   
*d* = 25 начинаются с цифры 9 и не содержат цифру 0 в своей десятичной записи. Первый нуль появляется у числа *a*37 = 92011. Так происходит потому, к 91111 надо 36 раз прибавить число 25, чтобы первый раз переполнить разряд сотен.

Первые 72 члена арифметической прогрессии с *a*1 = 911111 и *d* = 125 начинаются с цифры 9 и не содержат цифру 0 в своей десятичной записи. Первый нуль появляется у числа *a*73 = 920111. Так происходит потому, к 911111 надо 72 раза прибавить число 125, чтобы переполнить разряд тысяч.

Примеры с разностями 5, 25, 125 мы рассмотрели. Но уже четвёртая степень числа 5 — число *d =* 625 — при *a*1 = 911111 даёт нуль в 16-м члене, а дальше (*d =* 55,56, …) появляются цифры, которые нарушают циклич­ность смены цифр, обнаруженную для *d =* 5, 25, 125, поэтому увеличения числа членов без нулей не произойдёт.

**Ответ.** а) Да; г) *a*1 = 91111 и *d* = 125.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**13.3.** Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифр 8 и 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 6 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 70.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 32.

г) Приведите пример такой прогрессии с 32-мя членами. [1-1]

**========================================================**

**14. Арифметическая или геометрическая прогрессии   
в одной последовательности**

**14.1.** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую прогрессию, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов? [1-15]

**Решение.** а) Чтобы члены последовательности 1, *x*, 2046 составили арифметическую прогрессию, для натурального числа *x* должно выполняться равенство 1 + 2046 = 2*x*, что невозможно, так как при любом натуральном *x* слева нечётное число, а справа — чётное.

Чтобы члены последовательности 1, *x*, 2046 составили геометричес­кую прогрессию, для натурального числа *x* должно выполняться равенство 1 ∙ 2046 = *x*2, что невозможно, так как 452 < 2046 < 462. Ответ на вопрос: нет.

б) Если числа 1, 1 + *d*, 1 + 2*d* и 1 + *d*, 1 + 2*d*, 2046 составляют арифметические прогрессии, то 1 + 3*d* = 2046, что невозможно, так как при любом натуральном *d* число 2045 не делится на 3.

Так как разложение числа 2046 на простые множители не содержит второй степени простого числа: 2046 = 2 ∙ 3 ∙ 11 ∙ 31, то число 2046 не может быть ни третьим, ни четвёртым членом геометрической прогрессии.

Если числа 1, *q*, *q*2 составляют геометрическую прогрессию, а числа *q*, *q*2, 2046 составляют арифметическую прогрессию, то 2*q*2 = *q* + 2046, что невозможно, так как полученное уравнение не имеет натуральных корней. Ответ на вопрос: нет.

в) Да, например, 2046 — шестой член арифметической прогрессии с первым членом 1 и *d* = 409.

**Ответ.** а) Нет; б) нет; в) да.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**14.2.** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую прогрессию, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности 1, а последний 2017.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2017 членов? [\*]

**14.3.** В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую прогрессию, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности 1, а последний 2020.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2020 членов? [\*]

**========================================================**

**15. Геометрическая прогрессия из делителей данного числа**

**15.1.** Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

а) пять; б) четыре; в) три

из них образуют геометрическую прогрессию? [2-17]

**Решение.** а) – в) Разложим число 792 на простые множители:

792 = 23 ∙ 32 ∙ 11.

Принаименьшем первом члене *a*1 = 1 и *q* = 2 можно составить только геометрическую прогрессию из трёх членов: 1, 2, 4. Тогда другие два числа равны 9 и 11 (или 3 и 33). Итак, 792 = 1 ∙ 2 ∙ 4 ∙ 9 ∙ 11.

Для получения четырёх (пяти) членов геометрической прогрессии при *a*1 = 1 их произведение должно содержать шестую (десятую) степень натурального числа *q*:

1 ∙ *q* ∙ *q*2 ∙ *q*3 = *q*6 (1 ∙ *q* ∙ *q*2 ∙ *q*3 ∙ *q*4 = *q*10).

Таких степеней в разложении на простые множители числа 792 нет, поэтому нельзя получить ни 4, ни 5 последовательных членов геометрической прогрессии.

**Ответ.** а) Нет; б) нет; в) да, 1, 2, 4, 9, 11 или 1, 2, 4, 3, 33.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**15.2.** Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 672 и

а) пять; б) четыре; в) три

из них образуют геометрическую прогрессию? [2-31]

**========================================================**

**16. Опять геометрическая прогрессия**

**16.1.** Все члены геометрической прогрессии — различные натураль­ные числа, заключённые между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов? [1-30]

**Решение.** а) Четыре члена возрастающей геометрической прогрессии имеют вид: *a*1, *a*1*q*, *a*1*q*2, *a*1*q*3, где *a*1— первый член прогрессии, *q =*  > 1 (для убывающей прогрессии найденные числа надо записать в обратном порядке). Перебирая различные варианты, находим четыре члена геометрической прогрессии 216, 252, 294, 343 (*q =*  ). Ответ на вопрос: да.

б) В предыдущем задании нашлось число *a*1 = 216, которое делилось на 63, а при умножении на третью степень наименьшей дроби со знаменателем 6 — на — давало число из заданного промежутка. Проверим наименьшие числа из промежутка, кратные четвёртым степеням натуральных чисел:

224 делится на 24, но > 349,

243 делится на 34, но > 349,

256 делится на 44, но > 349.

Чисел, делящихся на 54, 64… в списке нет. Ответ на вопрос: нет.

**Ответ.** а) Да; б) нет.

**16.2.** Все члены геометрической прогрессии — различные натураль­ные числа, заключённые между числами 812 и 945.

а) Может ли такая прогрессия состоять из трёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов? [\*]

**Решение.** а) Три члена возрастающей геометрической прогрессии имеют вид: *a*1, *a*1*q*, *a*1*q*2, где *a*1— первый член прогрессии, *q =*  > 1 (для убывающей прогрессии найденные числа надо записать в обратном порядке). Перебирая различные варианты, находим три члена геометрической прогрессии 841, 870, 900, (*q* = ). Ответ на вопрос: да.

а) Четвёртый член арифметической прогрессии *a*4 = *a*1*q*3. Число *q*3 должно иметь вид , так как — наименьшая дробь со знамена­телем *n*. Тогда число *a*1 должно делиться на третью степень натуральные числа, на *n*3. Проверим наименьшие числа из промежутка, кратные третьим степеням натуральных чисел:

816 делится на 23, но > 945,

837 делится на 33, но > 945,

832 делится на 43, но > 945,

875 делится на 53, но > 945,

864 делится на 63, но > 945.

Чисел, делящихся на 73, 84,… в списке нет. Ответ на вопрос: нет.

**Ответ.** а) Да; б) нет.

**17. Задачи про турниры**

Начнём с подготовительных задач.

**17.1.** В турнире по шахматам каждый участник сыграл с остальными по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников вместе взятых. Сколько было участников турнира? [\*]

**Решение.** Пусть участников турнира *x* человек, *х* — натуральное число, они сыграли  = *х*2 *– x* партий и набрали *х*2 *– x* очков. Всего очков было 24 + 24⋅2 = 72. Решив уравнение *х*2 *– x* = 72, получим два корня *x*1 = 9 и *x*2 = – 8. Так как *х* — натуральное число, то *x* = 9.

**Ответ.** 9 участников.

**17.2.** Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько? [\*]

**Решение.** Участников турнира было 6 + 4 = 10. Они сыграли  =   
= 45 партий и набрали 45 ⋅ 2 = 90 (очков) независимо от исходов отдельных партий. По условию задачи девочки набрали 40 очков, тогда мальчики набрали 90 – 40 = 50 очков. Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим «турнир в турнире» — игры девочек между собой. В них сыграно  = 6 партий и набрано 6⋅2 = 12 (очков). Остальные 40 – 12 = 28 очков девочки выиграли у мальчиков.

Аналогично мальчики в играх между собой набрали 30 очков, значит, мальчики выиграли у девочек 50 – 30 = 20 очков. Итак, девочки выиграли у мальчиков на 28 – 20 = 8 очков больше, чем мальчики у девочек.

**Ответ.** Девочки выиграли у мальчиков на 8 очков больше.

**17.3.** В шахматном турнире участвовали учащиеся 10 класса и два ученика 9 класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? [\*]

**Решение.** Пусть из 10 класса в турнире участвовало *х* человек, *х* — натуральное число, тогда всех участников было (*х* + 2) человека и они набрали вместе (*х +* 2)(*х* + 1) = *х*2 *+* 3*x* + 2 (очков). Тогда десятиклассники набрали на 7 очков меньше: *х*2 *+* 3*x* – 5 очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен *х*2 *+* 3*x* – 5 делится на *х*,т. е. количество очков, набранных каждым учащимся 10 класса, равно  и является натуральным числом. Это возможно лишь при *х* = 1или при *х =* 5. В первом случае число очков каждого десятиклассника отрицательное, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в турнире участвовало 5 десятиклассников.

**Ответ.** 5 десятиклассников.

**17.4.** Несколько учащихся 9 «а» и 9 «б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали вместе 26 очков, а учащиеся 9 «б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира? [\*]

**Решение.** Пусть в турнире участвовало: из 9 «а» класса *х* человек, из 9 «б» класса (*х* + 3) человек, *х* — натуральное число, тогда всех участников было (2*х* + 3) человека и они набрали вместе (2*х +* 3)(2*х* + 2) = 4*х*2 *+* 10*x* + 6 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали 26 очков, учащиеся 9 «б» класса   
4*х*2 *+* 10*x* – 20 очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен   
4*х*2 *+* 10*x* – 20 делится на *х* + 3,т. е. количество очков, набранных каждым учащимся 9 «б» класса, равно  и является натуральным числом. Это возможно лишь при *х* = 4 или *х* = 11.

Второй случай не удовлетворяет условиям задачи, так как только в играх друг с другом 11 учащихся 9 «а» класса наберут 110 очков, что больше 26. Следовательно, участников турнира было 2 + 3 = 11.

**Ответ.** 11 участников.

**17.5.** В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки? [2-6]

**Решение.** Если *n* человек проводят турнир и каждый играет с каждым одну партию, то будет сыграно партий. В данной задаче каждый играет с каждым по 2 партии, поэтому будет сыграно *n*(*n* – 1) партий, а так как в каждой партии разыгрывается одно очко, то будет получено *n*(*n* – 1) очков.

а) Три девочки провели между собою 3 = 6 партий и набрали 6 очков. Если бы они выиграли все 3 = 30 партий у мальчиков, то набрали бы ещё 30 очков. Тогда наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, равно 6 + 30 = 36.

б) Все 9 участников сыграют 9 = 72 партии и наберут 72 очка.

в) Пусть в турнире играли 1 девочка и 9 мальчиков. В лучшем случае девочка выиграет все партий у мальчиков и наберёт 18 очков. Мальчики в играх между собою сыграют = 72 партии и наберут 72 очка — ровно в 4 раза больше, чем сумма очков девочки, что соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире могла играть одна девочка. Выясним, могло ли быть больше девочек.

Пусть теперь будет 2 девочки и 18 мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все партии у мальчиков и наберут 72 очка. Да ещё в 2-х играх между собою девочки наберут 2 очка. Всего девочки наберут 72 + 2 = 74 очка. Мальчики в играх между собою сыграют = 306 партий и наберут 306 очков, 306 : 74 > 4, что не соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире не могли играть две девочки.

Дальше с увеличением числа девочек отношение числа очков, набранных мальчиками, к числу очков, набранных девочками, будет увеличиваться. Докажем это.

Пусть в турнире играли *n* девочек и 9*n* мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все партий у мальчиков и наберут очков. Да ещё в = партиях между собою девочки набе­рут очков. Всего они наберут + = очков. В этом случае мальчики в играх между собою сыграют =   
= 81 партий и наберут 81 очков. Так как при любом *n* ≥ 2 + > 4, то в турнире не могли играть больше одной девочки.

Следовательно, могла быть только 1 девочка.

**Ответ.** а) 36; б) 72; в) 1.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**17.6.** В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчиков и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки? [2-44]

**========================================================**

**18. Наибольший общий делитель   
и наименьшее общее кратное**

**18.1.** Пусть *q* — наименьшее общее кратное, а *d* — наибольший общий делитель натуральных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих равенству

3*x* = 8*y* – 29. (1)

а) Может ли быть равным 170?

б) Может ли быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение [2-13]

**Решение.** а) Равенство (1) выполняется при *x* = 17 и *y* = 10. Так как для взаимно простых чисел *x* и *y* верны равенства *q* = *xy* = 170 и *d* = 1, то условие = 170 выполнено. Ответ на вопрос: да.

Если не удалось сразу найти нужную пару чисел *x* и *y*, то можно действовать так. Из формулы (1) следует, что *y* = 3 + . Перебираем значения *x*. Если *x* = 1, то *y* = 4, *d* = 1, *q* = 4, = 4. Чтобы опять получить целое *y*, надо *x* увеличить на 8 — на знамена­тель дроби. Если *x* = 9, то   
*y* = 7, *d* = 1, *q* = 63, = 63. Если *x* = 17, то *y* = 10, *d* = 1, *q* = 170, = 170.

б) Пусть *a* и *b* взаимно простые натуральные числа, такие, что *x* = *ad*, *y* = *bd* и *q* = *abd*, = *ab*. Предположим, что = 2, т. е. *ab* = 2. Возможны два случая.

1) *a* = 2, *b* = 1, *x* = 2*d*, *y* = *d*. Из равенства (1) следует, что *d* = 14,5, что невозможно.

2) *a* = 1, *b* = 2, *x* = *d*, *y* = 2*d*. Из равенства (1) следует, что *d* = , что невозможно.

Следовательно, ≠ 2. Ответ на вопрос: нет.

в) Выше доказано, что равенство = 4 возможно, а равенство = 2 — нет. Проверим, может ли эта дробь быть равной 1 или 3.

Если = 1, то *ab* = 1, *a* = *b* =1, *x* = *y* = *d* и из равенства (1) следует, что *d* = , что невозможно. Значит, ≠ 1.

Если = 3, то *ab* = 3. Возможны два случая.

1) Если *a* = 1, *b* = 3, то *x* = *d*, *y* = 3*d* и из равенства (1) следует, что   
*d* = , что невозможно.

2) Если *a* = 3, *b* = 1, то *x* = 3*d*, *y* = *d* и из равенства (1) следует, что   
*d* = –29, что невозможно.

Следовательно, ≠ 3.

Итак, наименьшее значение дроби равно 4.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 4.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**18.2.** Пусть *q* — наименьшее общее кратное, а *d* — наибольший общий делитель натуральных чисел *x* и *y*, удовлетворяющих равенству   
7*x* = 16*y* – 73.

а) Может ли быть равным 204?

б) Может ли быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение [2-28]

**========================================================**

**19. Одинаковые остатки при делении**

**19.1.** а) Приведите пример такого натуральные числа *n*, что числа *n*2 и   
(*n* + 16)2 дают одинаковые остатки при делении на 200.

б) Сколько существует трёхзначных чисел *n* с указанным в пункте *a* свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел *m*, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел *n* таких, что *n*2 и (*n* + *m*)2 дают одинаковые остатки при делении на 200? [2-15]

**Решение.** Число *n* = 17 удовлетворяет условию задачи, так как 172 =  
= 200 + 89, (17 + 16)2 = 1000 + 89. Остатки при делении на 200 равны.

Покажем, как получить этот результат. Пусть *n* — натуральное число и числа *n*2 и (*n* + 16)2 дают одинаковые остатки при делении на 200. Тогдаразность (*n* + 16)2 – *n*2 = 32*n* + 256 и число 32*n* + 56 делятся на 200. Пусть 32*n* + 56 = 200*k*, где *k* — натуральное число, тогда верно равенство

4*n* + 7 = 25*k*. (1)

Так как 4*n* = 25*k* – 7 = 24*k* – 4 + (*k* – 3), то 25*k* – 7 делится на 4 лишь при условии, что *k* = 4*p* + 3, где *p* = 0, 1, 2, … .

Тогда число *n* задаётся формулой

*n* = 25*p* + 17. (2)

Наименьшее число, задаваемое формулой (2), есть 17.

б) Чтобы число *n*, задаваемое формулой (2), было трёхзначным, должно выполняться двойное неравенство

100 25*p* + 17 999,

4 *p* 39.

Таких чисел *p* ровно 36, следовательно, существует 36 трёхзначных чисел *n*, удовлетворяющих условию задачи.

в) Пусть *n* и *m* — числа, для которых остатки от деления *n*2 и (*n* + *m*)2 на 200 равны. Тогда верно равенство:

(*n* + *m*)2 – *n*2 = 200*k*,

*m*2 + 2*mn* = 200*k*, (3)

где *k* — натуральное число.

Чтобы существовали ровно 36 трёхзначных чисел *n* таких, что выполняется равенство (3), надо чтобы в каждой из девяти сотен трёхзначных чисел содержалось ровно 4 числа *n.* Тогда числа *n* должны задаваться формулой *n* = 25*p* + *q*.

Если для пары чисел *m* и *n* число *m*2 + 2*mn* делится на 200, то с увеличением *p* на 1 число *n* увеличится на 25 и число *m*2 + 2*m*(*n* + 25) разделится на 200 лишь при условии, что *m* делится на 4. Таким образом, искомые числа *m* содержатся среди всех двузначных чисел, делящихся на 4 — их 22.

Но среди них есть числа, кратные 20, для которых существует более 36 чисел, удовлетворяющих равенству (3). Любое из них задаётся формулой   
*m* = 20*x*, где *x* — натуральное число, и если для пары чисел *m* и *n* число   
*m*2 + 2*mn* = 400*x*2 + 40*nx* делится на 200, то после увеличения *n* на 5 число *m*2 + 2*m*(*n* + 5) = 400*x*2 + 40*nx* + 200*x* разделится на 200. Для чисел   
*m* = 20*x* существует больше чем 36 трёхзначных чисел *n*, удовлетворяющих условиям задачи. Исключив 4 числа 20, 40, 60, 80 из списка 22-х двузначных чисел, получим, что существует 18 чисел *m*, удовлетворяющих условиям задачи.

**Ответ.** а) 17; б) 36; в) 18.

**19.2.** а) Приведите пример такого натуральные числа *n*, что числа *n*2 и   
(*n* + 12)2 дают одинаковые остатки при делении на 100.

б) Сколько существует трёхзначных чисел *n* с указанным в пункте *a* свойством?

в) Сколько существует двузначных чисел *m*, для каждого из которых существует ровно 36 трёхзначных чисел *n* таких, что *n*2 и (*n* + *m*)2 дают одинаковые остатки при делении на 100? [\*]

**Решение.** Число *n* = 19 удовлетворяет условию задачи, так как 192 =  
= 300 + 61, (19 + 12)2 = 900 + 61. Остатки при делении на 100 равны.

Покажем, как получить этот результат. Пусть *n* — натуральное число и числа *n*2 и (*n* + 12)2 дают одинаковые остатки при делении на 100. Тогдаразность (*n* + 12)2 – *n*2 = 24*n* + 144 и число 24*n* + 44 делятся на 100. Пусть 24*n* + 44 = 100*k*, где *k* — натуральное число, тогда верно равенство

6*n* + 11 = 25*k*. (1)

Так как 6*n* = 25*k* – 11 = 24*k* – 12 + (*k* + 1), то 25*k* – 11 делится на 6 лишь при условии, что *k* = 6*p* + 5, где *p* = 0, 1, 2, … .

Тогда число *n* задаётся формулой

*n* = 25*p* + 19. (2)

Наименьшее число, задаваемое формулой (2), есть 19.

б) Чтобы число *n*, задаваемое формулой (2), было трёхзначным, должно выполняться двойное неравенство

100 25*p* + 19 999,

4 *p* 39.

Таких чисел *p* ровно 36, следовательно, существует 36 трёхзначных чисел *n*, удовлетворяющих условию задачи.

в) Пусть *n* и *m* — числа, для которых остатки от деления *n*2 и (*n* + *m*)2 на 100 равны. Тогда верно равенство:

(*n* + *m*)2 – *n*2 = 100*k*,

*m*2 + 2*mn* = 100*k*, (3)

где *k* — натуральное число.

Чтобы существовали ровно 36 трёхзначных чисел *n* таких, что выполняется равенство (3), надо чтобы в каждой из девяти сотен трёхзначных чисел содержалось ровно 4 числа *n.* Тогда числа *n* должны задаваться формулой *n* = 25*p* + *q*.

Если для пары чисел *m* и *n* число *m*2 + 2*mn* делится на 100, то с увеличением *p* на 1 число *n* увеличится на 25 и число *m*2 + 2*m*(*n* + 25) разделится на 100 лишь при условии, что *m* делится на 2. Таким образом, искомые числа *m* содержатся среди всех двузначных чисел, делящихся на 2 — их 45.

Но среди них есть числа, кратные 10, для которых существует более 36 чисел, удовлетворяющих равенству (3). Любое из них задаётся формулой   
*m* = 10*x*, где *x* — натуральное число, и если для пары чисел *m* и *n* число   
*m*2 + 2*mn* = 100*x*2 + 20*nx* делится на 100, то после увеличения *n* на 5 число *m*2 + 2*m*(*n* + 5) = 100*x*2 + 20*nx* + 100 разделится на 100. Для чисел   
*m* = 10*x* существует больше чем 36 трёхзначных чисел *n*, удовлетворяющих условиям задачи. Исключив 9 чисел 10, 20, 30, …, 90 из списка 45-ти двузначных чисел, получим, что существует 36 чисел *m*, удовлетворяющих условиям задачи.

**Ответ.** а) 19; б) 36; в) 36.

**20. Наименьшее и наибольшее значение дроби**

**20.1.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: ?

б) Может ли дробь быть в 11 раз меньше, чем сумма ?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь , если   
*a* > 3*b* и *c* > 6*d*? [2-2]

**Решение.** а) Приведём дробь к числителю, который можно записать в виде суммы двузначных натуральных чисел: . Ответ на вопрос: можно,если *a* = 10, *b* = 20, *c* = 11, *d* = 37.

б) Чтобы дробь была в 11 раз меньше, чем сумма , должно выполняться равенство:

= ,

которое преобразуется к виду

11*abd* + 11*bcd* = *abd* + *bcd* + *ad*2 + *b*2*c*,

10*abd* + 10*bcd* – *ad*2 – *b*2*c* = 0,

*ad*(10*b – d*) + *bc*(10*d* – *b*) = 0.

Так как 10*b – d* > 0 и 10*d* – *b* > 0, то левая часть последнего равенства положительна, следовательно, ни для каких двузначных попарно различ­ных чисел *a*, *b*, *c* и *d* дробь не может быть в 11 раз меньше, чем сумма .

в) Если *a* > 3*b* и *c* > 6*d*, то *a* ≥ 3*b* + 1 и *c* ≥ 6*d* + 1. Используя нестрогие неравенства, получим, что *A* = . Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, дробь должна быть возможно меньше, для этого при каждом *d* число *b* в её знаменателе должно быть наибольшим. Так как *a* > 3*b*, то *b* = 32 (при *b* = 33 число *a* трёхзначное).

Итак, *A* . Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, дробь должна быть возможно больше, для этого число *d* в её знаменателе должно быть наименьшим, т. е. *d* = 10.

Итак, *A* . Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, онадолжна быть равно. Это возможно, если

*b* = 32, *a* = 3*b* + 1 = 97, *d* = 10, *c* = 6*d* + 1 = 61.

**Ответ.** а) Может, например, при *a* = 10, *b* = 20, *c* = 11, *d* = 37; б) нет;   
в) .

**20.2.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: ?

б) Может ли дробь быть в 11 раз меньше, чем сумма ?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь , если   
*a* > 3*b* и *c* > 2*d*? [2-12]

**Решение.** а) Приведём дробь к числителю 60: . Ответ на вопрос: можно,если *a* = 10, *b* = 70, *c* = 15, *d* = 25.

б) Чтобы дробь была в 11 раз меньше, чем сумма , должно выполняться равенство:

= ,

которое преобразуется к виду

33*abd* + 22*bcd* = 3*abd* + 2*bcd* +3*ad*2 + 2*b*2*c*,

30*abd* + 20*bcd* – 3*ad*2 – 2*b*2*c* = 0,

3*ad*(10*b – d*) + 2*bc*(10*d* – *b*) = 0.

Так как 10*b – d* > 0 и 10*d* – *b* > 0, то левая часть последнего равенства положительна, следовательно, ни для каких двузначных попарно различных чисел *a*, *b*, *c* и *d* дробь не может быть в 11 раз меньше, чем сумма .

в) Если *a* > 3*b* и *c* > 2*d*, то *a* ≥ 3*b* + 1 и *c* ≥ 2*d* + 1. Используя нестрогие неравенства, получим, что *A* = . Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, дробь должна быть возможно меньше, для этого число *d* в её знаменателе должно быть наибольшим. Так как *c* > 2*d*, то *d* = 49 (при *d* = 50 число *c* трёхзначное).

Итак, *A* . Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, дробь должна быть возможно больше, для этого число *b* в её знаменателе должно быть наименьшим, т. е. *b* = 10.

Итак, *A* . Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, онадолжна быть равна . Это возможно, если

*b* = 10, *a* = 3*b* + 1 = 31, *d* = 49, *c* = 2*d* + 1 = 99.

**Ответ.** а) Может, например, при *a* = 10, *b* = 70, *c* = 15, *d* = 25; б) нет; в) .

Изменим вопрос в задании в).

**20.3.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: ?

б) Может ли дробь быть в 12 раз меньше, чем сумма ?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь , если   
*a* < 5*b* и *c* < 6*d*? [\*]

**Решение.** а) Приведём дробь к числителю, который можно записать в виде суммы двузначных натуральных чисел: . Ответ на вопрос: можно,если *a* = 10, *b* = 20, *c* = 11, *d* = 29.

б) Чтобы дробь была в 12 раз меньше, чем сумма , должно выполняться равенство:

= ,

которое преобразуется к виду

12*abd* + 12*bcd* = *abd* + *bcd* + *ad*2 + *b*2*c*,

11*abd* + 11*bcd* – *ad*2 – *b*2*c* = 0,

*ad*(11*b – d*) + *bc*(11*d* – *b*) = 0.

Так как 11*b – d* > 0 и 11*d* – *b* > 0, то левая часть последнего равенства положительна, следовательно, ни для каких двузначных попарно различных чисел *a*, *b*, *c* и *d* дробь не может быть в 12 раз меньше, чем сумма .

в) Если *a* < 5*b* и *c* < 6*d*, то *a* ≤ 5*b* – 1 и *c* ≤ 6*d* – 1. Используя нестрогие неравенства, получим, что *A* = . Чтобы дробь *A* принимала наибольшее значение, дробь должна быть возможно больше, для этого число *b* в её знаменателе должно быть наименьшим:   
*b* = 10.

Итак, *A* . Чтобы дробь *A* принимала наибольшее значение, дробь должна быть возможно меньше, для этого число *d* в её знаменателе должно быть наибольшим:   
*d* = 99.

Итак, *A* Чтобы дробь *A* принимала наибольшее значение, онадолжна быть равна. Это возможно, если

*b* = 10, *a* = 5*b* – 1 = 49, *d* = 99, *c* = 6*d* – 1 = 593.

**Ответ.** а) Может, например, при *a* = 10, *b* = 20, *c* = 11, *d* = 29; б) нет; в) .

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**20.4.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: ?

б) Может ли дробь быть в 12 раз меньше, чем сумма ?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь , если   
*a* > 2*b* и *c* > 5*d*? [\*]

**20.5.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: ?

б) Может ли дробь быть в 13 раз меньше, чем сумма ?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь , если   
*a* > 5*b* и *c* > 3*d*? [\*]

**20.6.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: ?

б) Может ли дробь быть в 13 раз меньше, чем сумма ?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь , если   
*a* < 3*b* и *c* < 4*d*? [\*]

**========================================================**

**21. Математик и арифметическая прогрессия**

**21.1.** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии её следующий член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй разность оказалась на 72 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1938 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 17 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1938 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала? [\*]

**Решение.** а) Пример прогрессии: 2, 4. Требуемая разность равна

((2 + 4 + 6)2 – (22 + 42 + 62)) – ((2 + 4)2 – (22 + 42)) =  
= 2(8 + 12 + 24) – 2 ∙ 8 = 72.

б) Пусть *a*1, *a*2, *a*3, …, *an* — возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из неотрицательных целых чисел. Вычислим обе разности:

*R*1 = (*a*1 + *a*2 + … + *an*)2 – ( + + … + ) =

= 2(*a*1*a*2 + *a*1*a*3 + … + *an –* 1*an*).

*R*2 = (*a*1 + *a*2 + … + *an* + *an* + 1)2 – ( + + … + + ) =

= 2(*a*1*a*2 + *a*1*a*3 + … + *an –* 1*an*) + 2*an* + 1(*a*1 + *a*2 + … + *an*).

Из второй разности вычтем первую:

*R*2 – *R*1 = 2*an* + 1(*a*1 + *a*2 + … + *an*).

Требуется составить такую прогрессию, чтобы выполнялось равенство

2*an* + 1(*a*1 + *a*2 + … + *an*) = 1938,

2(*a*1 + *nd*) *n* = 1938,

(*a*1 + *nd*) *n* = 1938. (1)

Если последовательность состоит из 17 членов, то из равенства (1) следует, что верно равенство

(*a*1 + 17*d*) 17 = 1768. (2)

Равенство (2) неверно даже при наименьших значениях *a*1 = 0 и *d* = 1, так как левая часть равенства больше правой, а с увеличением *a*1 или *d* левая часть равенства только увеличивается. Таким образом, прогрессия не может содержать 17 (и более) членов.

в) Из равенства (1) следует, что *n* является делителей числа 1938, т. е. число *n* содержится среди делителей числа 1938: 1, 2, 3, 6, 17, 19, …, 1938. Уже показано, что *n* < 17. Проверим *n* = 6 — наибольший из оставшихся делителей числа 1768.

Если *n* = 6, то равенство (1) имеет вид:

(*a*1 + 6*d*) (2*a*1 + 5*d*) 6 = 1938,

(*a*1 + 6*d*) (2*a*1 + 5*d*) = 323,

оно выполняется при *a*1 = 1, *d* = 3. Следовательно, наибольшее число членов равно 6.

**Ответ.** а) 2, 4; б) нет; в) 6.

**21.2.** Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии её следующий член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?   
[2-16]

**Решение.** а) Пример прогрессии: 1, 3. Требуемая разность равна

((1 + 3 + 5)2 – (12 + 32 + 52)) – ((1 + 3)2 – (12 + 32)) =  
= 2(3 + 5 + 15) – 2 ∙ 3 = 40.

б) Пусть *a*1, *a*2, *a*3, …, *an* — возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из неотрицательных целых чисел. Вычислим разность *R*2 – *R*1 как показано в предыдущем решении:

*R*2 – *R*1 = 2*an* + 1(*a*1 + *a*2 + … + *an*).

Требуется составить такую прогрессию, чтобы выполнялось равенство

2*an* + 1(*a*1 + *a*2 + … + *an*) = 1768,

2(*a*1 + *nd*) *n* = 1768,

(*a*1 + *nd*) *n* = 1768. (1)

Если последовательность состоит из 13 членов, то из равенства (1) следует, что верно равенство

(*a*1 + 13*d*) 13 = 1768. (2)

Равенство (2) неверно даже при наименьших значениях *a*1 = 0 и *d* = 1, так как левая часть равенства больше правой, а с увеличением *a*1 или *d* левая часть равенства только увеличивается. Таким образом, прогрессия не может содержать 13 (и более) членов.

в) Из равенства (1) следует, что *n* является делителей числа 1768, т. е. число *n* содержится среди делителей числа 1768: 1, 2, 4, 8, 13, 17, …, 1768. Выше показано, что *n* < 13. Проверим *n* = 8 — наибольший из оставшихся делителей числа 1768.

Если *n* = 8, то равенство (1) имеет вид:

(*a*1 + 8*d*) (2*a*1 + 7*d*) 8 = 1768,

(*a*1 + 8*d*) (2*a*1 + 7*d*) = 221,

оно выполняется при *a*1 = 5, *d* = 1. Следовательно, наибольшее число членов равно 8.

**Ответ.** а) 1, 3; б) нет; в) 8.

**22. Конечная последовательность натуральных чисел**

**22.1.** Все члены конечной последовательности являются натураль­ными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 15 раз больше, либо в 15 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3825.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наименьшее количество членов может быть в последователь­ности? [2-18]

**Решение.** а) Последовательность из двух членов может иметь вид *a*, 15*a* или 15*a*, *a*. В обоих случаях сумма этих натуральных чисел чётная, а 3825 — число нечётное. Ответ на вопрос: нет.

б) Последовательность из трёх членов может иметь вид *a*, 15*a*, *a* — сумма этих натуральных чисел делится на 17. Так как 3825 = 17 ∙ 225, то Последовательность может иметь вид 225, 3375, 225. Ответ на вопрос: да.

в) Чтобы при фиксированной сумме членов последовательности она имела наибольшее число членов, не нужно брать члены последователь­ности, содержащие степени числа 15 выше первой, а число *a* надо взять равным 1. Члены последовательности 1, 15 не могут быть взяты в одинаковом количестве, так как тогда их сумма чётная. Возможны 2 варианта: *n* раз 1 и *n* + 1 раз 15:

15, 1, 15, 1, …, 15, 1, 15

или *n* раз 15 и *n* + 1 раз 1:

1, 15, 1, 15, …, 1, 15, 1

Если сумма всех членов последовательности равна 3825, то в первом случае число *n* дробное, во втором — целое: *n* = 239. Тогда всех членов плоскости может быть *n* + *n* + 1 = 239 + 239 + 1 = 479.

**Ответ.** а) Нет; б) да; в) 479.

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**22.2.** Все члены конечной последовательности являются натураль­ными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 5 раз больше, либо в 5 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 1560.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последователь­ности? [\*]

**22.3.** Все члены конечной последовательности являются натураль­ными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 9 раз больше, либо в 9 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 830.

а) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

б) Может ли последовательность состоять из четырёх членов?

в) Какое наименьшее количество членов может быть в последователь­ности? [\*]

**========================================================**

**23. Уравнение в целых числах**

**23.1.** Решите уравнение *x*2 – *y*2 = 1951 в целых числах. [\*]

**Решение.** Перепишем уравнение в виде

(*x*– *y*)(*x*+ *y*) = 1951. (1)

Так как число 1951 простое (автор всё знает про свой год рождения), то уравнение (1) имеет лишь те целочисленные решения (*x*; *y*), которые являются решениями четырёх систем:

Так как системы имеют решения (976; 975), (976; –975), (–976; –975), (–976; 975) соответственно, то уравнение (1) имеет только эти целые решения.

**Ответ.** (976; 975), (976; –975), (–976; –975), (–976; 975).

**23.2.** Решите уравнение 3*n*+ 8 = *x*2 в целых числах. [2-11]

**Решение.** 1) Пусть *n* = 0, тогда уравнение имеет два решения:

*n* = 0, *x* = 3; *n* = 0, *x* = –3.

2) Пусть *n* > 0. Перепишем уравнение в виде:

(3*n*+ 6) + 2 = *x*2.

Так как при любом целом *n* > 0 и любом целом *x* левая часть уравнения при делении на 3 даёт остаток 2, а правая часть — квадрат целого числа —даёт только два остатка — 0 и 1, то в этом случае уравнение не имеет решений в целых числах.

3) Пусть *n* < 0. Перепишем уравнение в виде:

3*n*= *x*2 – 8.

Так как при любом целом *n* < 0 и любом целом *x* левая часть уравнения — число дробное, а правая часть — число целое, то и в этом случае уравнение (1) не имеет решений в целых числах.

**Ответ.** *n* = 0, *x* = 3; *n* = 0, *x* = –3.

**===========Задача для самостоятельного решения==============**

**23.3.** Докажите, что уравнение *x*2 + *y*2 = 1951 не имеет решений в целых числах. [\*]

**========================================================**

**24. Треугольник с целочисленными сторонами**

**24.1.** Про три различных натуральные числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно ?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно ?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25? [2-25]

**Решение.** а) Пусть меньшая сторона треугольника равна 7, большая 13. Из теоремы косинусов следует, что . Для выполнения условия «больший угол треугольника тупой», т. е. , достаточно выполнения неравенства

, (1)

где *b* – длина средней по величине стороны.

При *b* = 8 треугольник существует и неравенство (1) верно. Ответ на вопрос: да.

б) Предположим, что такой треугольник существует. Пусть меньшая и большая стороны треугольника равны соответственно 7*x* и 8*x*, где *x —* натуральное число, *b* — длина средней по величине стороны.

Требуется выяснить, найдётся ли натуральное число *b*, такое, что выполняется неравенство

49. (2)

Если неравенство (2) верно, то из него следует, что , т. е.   
*b* < < 7*x*, а это противоречит условию задачи, что число 7*x* — наименьшее из 7*x*, 8*x*, *b*. Следовательно, отношение большего из чисел к меньшему из них не может быть равно .

в) Пусть стороны треугольника имеют длины *a*, 25, *c* и верно неравенство *a* < 25 < *c*. Из теоремы косинусов для тупоугольного треугольника следует неравенство

> + 625. (3)

Начнём проверку с *a* = 24. В этом случае > 1201. Отношение будет наименьшим, если мы выберем наименьшее натуральное число   
*c* = 35, удовлетворяющее неравенству (3): .

Если *a* = 23, то > 1154, наименьшее *c* = 34, > .

Дальнее уменьшение числа *a* приводит к увеличению дроби , поэтому наименьшее значение, которое может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, равно

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) .

**===========Задачи для самостоятельного решения==============**

**24.2.** Про три различных натуральные числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно 2?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно ?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 20? [2-43]

**24.3.** Про три различных натуральные числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно ?

б) Может ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно ?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 18? [2-47]

**========================================================**

**25. Возвратные последовательности**

Прежде, чем приступить к разбору решений двух последних и самых сложных задач из сборника [2], отметим, что не видим разумных аргументов за включение задач такого типа в массовый экзамен, даже под номером 19, под которым мы уже покупали карандаши, переворачивали карточки и т. д., и т. п. Тем не менее, выпускнику, настроенному на серьёзное изучение математики в вузе, разбор решений этих задач может оказаться полезен. Поэтому, не боясь реплики Настасьи Тимофеевны из «Свадьбы» А.П. Чехова: «Нудный ты, ух нудный!», приступим к делу.

Слово рекуррентный происходит от латинского recurrens — возвращающийся. Рекуррентная последовательность — возвратная последовательность. Например, последовательность чисел Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, …

является возвратной последовательностью, в ней каждый следующий член, начиная с третьего, равен сумме двух предшествующих. Задать эту последовательность можно так: *a*1 = *a*2 = 1, *ak +* 2 = *ak +* 1 + *ak*.

**25.1.** Конечная возрастающая последовательность *a*1, *a*2, …, *an* состоит из *n* ≥ 3 натуральных чисел[[2]](#footnote-2), причём при всех натуральных *k* ≤ *n* – 2 выполнено равенство 3*ak +* 2 = 5*ak +* 1 – 2*ak*.

а) Приведите пример такой последовательности при *n* = 4.

б) Может ли в такой последовательности при некотором *n* ≥ 3 выпол­няться равенство *an* = 3*a*2 – 2*a*1?

в) Какое наименьшее значение может принимать *a*1, если *an* = 667?   
[2-3]

**Решение.** *I способ*. Пусть дана возрастающая последовательность:   
*a*1, *a*2, *a*3, *a*4, … Тогда для троек её последовательных членов должны выполняться равенства:

3*a*3 = 5*a*2 – 2*a*1, (1)

3*a*4 = 5*a*3 – 2*a*2. (2)

а) Приведём один из способов получения тройки последовательных членов последовательности по её первому члену: *a*1, *a*1 + 3, *a*1 + 5. Равенство (1) выполняется:

3(*a*1 + 5) = 5(*a*1 + 3) – 2*a*1.

В полученном равенстве слагаемые 5 и 3 в скобках можно одновременно удвоить, утроить, … при этом будут получаться новые верные равенства:

3(*a*1 + 10) = 5(*a*1 + 6) – 2*a*1,

3(*a*1 + 15) = 5(*a*1 + 9) – 2*a*1, …

Так можно получать новые возрастающие последовательности из трёх чисел по заданному *a*1:

*a*1, *a*1 + 6, *a*1 + 10,

*a*1, *a*1 + 9, *a*1 + 15, …

Для первой последовательности по формуле (2) получим дробное *a*4, а для второй — целое: *a*4 = *a*1 + 19. Получена последовательность из четырёх членов, удовлетворяющая условиям задачи:

*a*1, *a*1 + 9, *a*1 + 15, *a*1 + 19.

При *a*1 = 1 получим последовательность: 1, 10, 16, 20.

б) Покажем, что если при некотором *n* ≥ 3 выполняется равенство   
*an* = 3*a*2 – 2*a*1, то *an* = *an*–1, т. е. последовательность не является возрас­тающей, а значит, не существует возрастающая последовательность, удовлетворяющая равенству *an* = 3*a*2 – 2*a*1.

При *n* = 3 должно выполняться равенство

*a*3 = 3*a*2 – 2*a*1, (3)

но тогда из равенств (1) и (3) следует, что *a*3 = *a*2.

Так как при *n* = 4 должны выполняться равенства (1) и (2), то, сложив их, получим, что

3*a*4 = 2*a*3 + 3*a*2 – 2*a*1. (4)

Так как *a*4 = 3*a*2 – 2*a*1, то из равенства (4) получим:

3*a*4 = 2*a*3 + *a*4,

*a*4 = *a*3.

При *n* > 4 должны выполняться равенства

3*a*3 = **5*a*2 – 2*a*1**,

3*a*4 = 5*a*3 – **2*a*2**,

3*a*5 = 5*a*4 – 2*a*3,

…

**3*an*–1** = 5*an*–2 – 2*an–*3,

**3*an*** = **5*an*–1** – 2*an–*2.

Сложив их, получим равенство

3*an* = 2*an*–1 + 3*a*2 – 2*a*1.

Заменив 3*a*2 – 2*a*1 на *an*, из последнего равенства получим:

*an* = *an*–1.

Итак, не существует возрастающая последовательность, удовлетворяющая равенству *an* = 3*a*2 – 2*a*1.

в) Пусть дана возрастающая последователь­ность: *a*1, *a*2, 667. Для неё из равенства (1) следует, что:

3∙667 = 5*a*2 – 2*a*1,

2001 + 2*a*1 = 5*a*2.

Наименьшее значение *a*1, при котором верно это равенство, равно 2. Тогда *a*2 = 401. Последовательность из трёх членов получена: 2, 401, 667. Выясним, можно ли при *a*1 = 1 получить *an* = 667.

Для этого будем строить последовательность с *a*1 = 1. Выполним полный перебор всех возможных значений *n*.

1) При *n* = 3 имеем последовательность 1, *a*2, *a*3 и верное равенство

3*a*3 = 5*a*2 – 2. (5)

Из равенства (5) следует, что при делении на 3 число *a*2 должно иметь остаток 1, т. е. *a*2 = 3*b* + 1, где . Тогда *a*3 = = 5*b* + 1. Получили последовательность: 1, 3*b* + 1, 5*b* + 1, но 5*b* + 1 ≠ 667.

2) При *n* = 4 имеем последовательность 1, 3*b* + 1, 5*b* + 1, *a*4 и верное равенство

3*a*4 = 5*a*3 – 2*a*2,

3*a*4 = 5(5*b* + 1) – 2(3*b* + 1),

3*a*4 = 19*b* + 3.

Последнее равенство может быть верно лишь при *b* = 3*c*, где . Тогда *a*4 = 19*b* + 1. Получили последовательность: 1, 9*c* + 1, 15*c* + 1,   
19*c* + 1, но 19*c* + 1 ≠ 667.

3) При *n* = 5 имеем последовательность 1, 9*c* + 1, 15*c* + 1, 19*c* + 1, *a*5 и верное равенство

3*a*5 = 5*a*4 – 2*a*3,

3*a*5 = 5(19*c* + 1) – 2(15*c* + 1),

3*a*5 = 65*c* + 3.

Последнее равенство может быть верно лишь при *c* = 3*d*, где . Тогда *a*5 = 65*d* + 1. Получили последовательность: 1, 27*d* + 1, 45*d* + 1, 57*d* + 1, 65*d* + 1, но 65*d* + 1 ≠ 667.

Аналогично рассуждая, получим:

при *n* = 6 последовательность 1, 81*e* + 1, 135*e* + 1, 171*e* + 1, 195*e* + 1,   
211*e* + 1, где , но 211*e* + 1 ≠ 667;

при *n* = 7 последовательность 1, 243*f* + 1, 405*f* + 1, 513*f* + 1, 585*f* + 1,   
633*f* + 1, 665*f* + 1, где , но 665*f* + 1 ≠ 667.

Продолжать проверку для *n* > 7 не нужно, так как наименьшие *an* будут больше 667.

Итак, наименьшее значение *a*1, при котором *an* = 667, равно 2.

*II способ*. Зададим ту же последовательность формулой общего члена. Пусть *a*1 = *a*, *a*2 = *a* + *x*, где *a* и *x* — натуральные числа. Из формул (3) и (4) получим *a*3 = *a* + *x*, *a*4 = *a* + *x*. Записав коэффициенты, стоящие перед *x*, в виде: *k*2 = 1 = , *k*3 = *=* , *k*4 = = , приходим к гипотезе, что для *n* ≥ 2 верно равенство:

*kn* = . (6)

Докажем равенство (6) методом математической индукции. Тем самым мы докажем, что последовательность можно задать формулой общего члена:

*an* = *a* + ∙ *x*. (7)

При *n* = 2 и *n* = 3 равенство (6) верно.

Предположим, что равенство (6) верно для *n* = *m* и *n* = *m* + 1, то есть, что

*km* = и *km* + 1 = (8)

и докажем, что тогда равенство (6) верно для *n* = *m* + 2, то есть, что

*km* + 2 = . (9)

По условию задачи 3*am* + 2 = 5*am* + 1 – 2*am*, перепишем это равенство, используя равенства (8):

3*am* + 2 = 5(*a* + *km*+1*x*) – 2(*a* + *kmx*) =

= 3*a* += 3*a* + =

= 3*a* +,

откуда следует, что *am* + 2 = *a* + , т. е. *km* + 2 = . Тогда, согласно принципу математической индукции, равенство (6) верно для любых натуральных *n*, таких, что *n* ≥ 2. Следовательно, последовательность можно задать формулой общего члена (7).

Теперь ответим на вопросы *а – в*.

а) Приведём пример последовательности, состоящей из четырёх членов: *a*1 = *a*, *a*2 = *a* + *x*, *a*3 = *a* + *x*, *a*4 = *a* + *x*, выбрав наименьшие натуральные числа: *a* = 1 и *x* = 9, при которых все члены последовательности являются натуральными числами: 1, 10, 16, 20.

б) Предположим, что в такой последовательности для некоторых натуральных *a*, *x* и *n* выполняется равенство *an* = 3*a*2 – 2*a*1. Тогда верно равенство

*a* + ∙ *x* = 3(*a* + *x*) – 2*a*,

∙ *x* = 3*x*,

= 3 ∙ ,

= ,

что невозможно. Ответ на вопрос: нет.

в) Пусть при некотором *n* число 667 является членом последователь­ности с номером *n*: *an* = 667. То есть верно равенство

667 = *a* + ∙ *x*.

Так как правая часть этого равенства натуральное число, то *x* = ∙ *y*, где *y* — натуральное число.

При *a*1 = 1 имеем:

∙ *y* = 666. (10)

Проверка показывает, что для *n* = 3, 4, 5, 6, 7 равенство (10) неверно, а при *n* > 7 левая часть этого равенства больше правой. Следовательно, последовательности с первым членом 1 и *an* = 667 не существует.

При *a*1 = 2 имеем:

∙ *y* = 665. (11)

Проверка показывает, что для *n* = 3, *y* = 133 равенство (11) верно. Следовательно, последовательность с первым членом 2 и *a*3 = 667 существует, для неё *a* = 2, *x* = 3 ∙ 133 = 399. Вот эта последовательность:

2, 401, 667.

Итак, если *an* = 667, то наименьшее значение *a*1 = 2.

**Ответ.** а) 1, 10, 16, 20; б) нет; в) 2.

*Замечание.* Стоит напомнить, что на ЕГЭ перед выпускником не стоит задача написать возможно более подробное решение. В решении задания а) достаточно подобрать 4 члена последовательности и показать, что они удовлетворяют условиям задачи, а решения заданий б) и в) надо описать возможно короче.

**25.2.** Конечная последовательность *a*1, *a*2, …, *an* состоит из *n* ≥ 3 не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных *k* ≤ *n* – 2 выполнено равенство *ak +* 2 = 2*ak +* 1 – *ak* – 1.

а) Приведите пример такой последовательности при *n* = 5, в которой   
*a*5 = 4.

б) Может ли в такой последовательности некоторое натуральное число встретиться 3 раза?

в) При каком наибольшем *n* такая последовательность может состоять только из трёхзначных чисел? [2-7]

**Решение.** Пусть дана последователь­ность: *a*1, *a*2, *a*3, *a*4, *a*5. Тогда для троек её последовательных членов должны выполняться равенства:

*a*3 = 2*a*2 – *a*1 – 1, (а)

*a*4 = 2*a*3 – *a*2 – 1, (б)

*a*5 = 2*a*4 – *a*3 – 1. (в)

а) Следуя замечанию к предыдущей задаче, «поколдовав» немного с равенствами (а) – (в), получим две последовательности: 2, 4, 5, 5, 4 и 6, 7, 7, 6, 4. Убедитесь, что обе они удовлетворяют равенствам (а) – (в).

б) Выведем формулу общего члена последовательности. Пусть *a*1 = *a*, *a*2 = *a* + *x*, где *a* и *x* — натуральные числа. Выразим члены последователь­ности через *a* и *x*:

*a*1 = *a*,

*a*2 = *a + x*,

*a*3 = 2*a*2 – *a*1 – 1 = *a +* 2*x* – 1,

*a*4 = 2*a*3 – *a*2 – 1 = *a +* 3*x* – 3,

*a*5 = 2*a*4 – *a*3 – 1 = *a +* 4*x* – 6,

*a*6 = 2*a*5 – *a*4 – 1 = *a +* 5*x* – 10,…

Как получаются два первые слагаемые — понятно, уловив связь чисел 1, 3, 6, 10, … с коэффициентами 2, 3, 4, 5 перед *x*, приходим к гипотезе:

*an* = *a +* (*n* – 1)*x* – . (1)

Докажем равенство (1) методом математической индукции.

1) При *n* = 1 и при *n* = 2 равенство (1) верно.

2) Предположим, что равенство (1) верно для *n = k* и для *n = k* + 1:

*ak* = *a +* (*k* – 1)*x* – (2)

*ak* + 1 = *a + kx* – . (3)

и докажем, что оно верно для *n = k* + 2, т. е., что верно равенство

*ak* + 2 = *a +* (*k* + 1)*x* – . (4)

**Доказательство.** По условию задачи

*ak +* 2 = 2*ak +* 1 – *ak* – 1 = 2*a +* 2*kx* – *k*(*k* – 1) – *a –* (*k* – 1)*x* + – 1 =

*= a +* (*k* + 1)*x* – , что и требовалось доказать.

Итак, мы проверили, что при *n* = 1 и при *n* = 2 равенство (1) верно, доказали, что из предположения, что оно верно для *n = k* и для *n = k* + 1 следует, что оно верно для *n = k* + 2. Согласно принципу математической индукции, равенство (1) верно для любого натурального *n*.

Теперь заметим, что формула (1) при каждой выбранной паре чисел *a* и *x* выражает *an*при помощи квадратичной функции от *n*, а квадратичная функция не может принимать равные значения при трёх различных значениях аргумента, следовательно, у любой такой последовательности нет трёх равных членов.

в) Из предыдущего пункта решения следует, что члены последователь­ности сначала увеличиваются до значения одного или двух членов, номера которых близки к абсциссе вершины параболы, а потом уменьшаются. Чтобы получить наибольшее число трёхзначных членов последователь­ности, надо взять *a* = 100 и выяснить, для каких *x* и *n* число *an*≤ 100.

100 *+* (*n* – 1)*x* – ≤ 100,

(*n* – 1)*x* – ≤ 0,

*x* ≤ .

При *n* = 84 должно выполняться неравенство *x* ≤ 41. Возьмём *x* = 41, тогда *a*84 = 100 *+* 83∙41 – = 100. Найдём члены последовательности в середине списка чисел:

*a*42 = 100 *+* 41∙41 – = 961 < 999,

*a*43 = 100 *+* 42∙41 – = 961 < 999.

При *n* = 85 должно выполняться неравенство *x* ≤ 41,5. Возьмём *x* = 41, тогда *a*85 = 100 *+* 84∙41 – = 58 < 100.

При *n* = 86 должно выполняться неравенство *x* ≤ 42. Возьмём *x* = 42, тогда *a*86 = 100 *+* 85∙42 – = 100. Найдём члены последовательности в середине списка чисел:

*a*43 = 100 *+* 42∙42 – = 1003 > 999,

*a*44 = 100 *+* 43∙42 – = 1003 > 999.

Далее с увеличением *n* можно получать *an* — трёхзначные числа, но из-за подъёма вершины параболы средние члены последовательности уже не будут трёхзначными числами. Следовательно, наибольшее *n*, при котором последовательность может состоять только из трёхзначных чисел, равно 84.

**Ответ.** а) 6, 7, 7, 6, 4; б) нет; в)[[3]](#footnote-3) при *n* = 84.

**Послесловие**

Записав придуманные решения двух последних задач, автор остался недоволен их громоздкостью. Почему-то вспомнилось расхожее выраже­ние «Не стреляйте в пианиста, он играет, как умеет!»

Более простые решения этих задач, а также замечания и предложения по остальным задачам, будут с благодарностью приняты по адресу: [avshevkin@mail.ru](mailto:avshevkin@mail.ru). Ваши интересные решения тех же задач можно опубликовать на сайте «Математика. Школа. Будущее» ([www.shevkin.ru](http://www.shevkin.ru)) с указанием фамилии автора решения.

**Ответы**

**1.2.** а) Да; б) нет; в) 31. **2.2.** а) Да; б) да; в) нет. **2.3.** а) Да; б) да; в) 18. **3.2.** а) Нет; б) нет; в) 4. **4.2.** а) 114; б) да, например, 153; в) 34506, 51759. **5.2.** а) 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119. **6.3.** а) Да; б) нет; в) 5,4. **6.4.** а) Да; б) да; в) 7. **8.6.** а) Да; б) нет; в) 39. **8.7.** а) 33; б) отрицательных чисел больше; в) 7. **9.2.** а) Нет; б) да; в) 12. **10.3.** а) Да; б) 11; в) . **12.2.** а) 4; б) 4999; в) 5056. **12.3.** а) 1; б) 4996; в) 5056. **13.3.** а) Да; г) *a*1 = 1 и *d* = 250. **14.2.** а) Да; б) да; в) да. **14.3.** а) Нет; б) да; в) да. **15.2.** а) Нет; б) нет; в) да, 1, 2, 4, 7, 12. **17.6.** а) 14; б) 90; в) 1. **18.2.** а) Да; б) нет; в) 5. **20.4.** а) Да; б) нет; в) . **20.5.** а) Да; б) нет; в) . **20.6.** а) Да; б) нет; в) . **22.2.** а) Нет; б) да; в) 520. **22.3.** а) Нет; б) нет; в) 6. **24.2.** а) Да; б) нет; в) . **24.3.** а) Да; б) нет; в) .

**Литература**

**1. ЕГЭ-2017** : Математика : 30 тренировочных вариантов экзамена­ционных работ для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под ред. И.В. Ященко. М.: АСТ, 2017. – 135 с.

**2. ЕГЭ-2017** : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.

**Оглавление**

1. Покупка в пределах заданной суммы 2

2. Учитель пишет примеры на сложение… 3

3. Переворачиваем карточки 4

4. Натуральное число и сумма его цифр 4

5. Построение солдат 5

6. Наибольшее из наименьших и наименьшее из наибольших 8

7. Чётность, нечётность, делимость, простые числа 10

8. На доске написали натуральные числа… 12

9. Опросы: проценты и респонденты 16

10. Задачи про футболистов и хоккеистов, бутерброды и   
конфеты, кошек и собак 17

11. Аликвотные дроби 21

12. Замена членов бесконечной арифметической   
прогрессии суммой их цифр 22

13. Арифметическая прогрессия с ограничениями   
на использование цифр 24

14. Арифметическая и геометрическая прогрессии   
в одной последовательности 25

15. Геометрическая прогрессия из делителей данного числа 26

16. Опять геометрическая прогрессия 27

17. Задачи про турниры 28

18. Наибольший общий делитель и наименьшее   
общее кратное 31

19. Одинаковые остатки при делении 32

20. Наименьшее и наибольшее значение дроби 35

21. Математик и арифметическая прогрессия 38

22. Конечная последовательность натуральных чисел 40

23. Уравнение в целых числах 41

24. Треугольник с целочисленными сторонами 42

25. Возвратные последовательности 43

Послесловие 50

Ответы 50

Литература 50

1. Эта четвёрка чисел, потеряна в ответе в сборнике [1]. [↑](#footnote-ref-1)
2. Из условия задачи удалены слова: «не обязательно различных» — они из следующей задачи. В возрастающей последовательности таких членов быть не может. Условия «возрастающая последова­тельность» и «состоит из не обязательно различных чисел» не совмещаются в одной задаче, как не совмещаются «несокрушимый столб» и «всесокрушающее пушечное ядро». [↑](#footnote-ref-2)
3. В сборнике [2] указан ответ «при *n* = 82». [↑](#footnote-ref-3)