**А.В. Шевкин**

**Экономические задачи. От простого к сложному**

**Предисловие**

Экономические задачи из ЕГЭ за 2015–2017 разнообразны по сюжетам, они расположены в книжке согласно названию: от простого к сложному — от темы к теме и от задачи к задаче внутри темы. Решения задач описаны подробно, к некоторым из них приведено второе решение.

Источники задач — сборники [1] – [2]. После каждой задачи указаны номера сборника и варианта. Например, [2-20] — сборник 2, вариант 20. Для большего разнообразия сюжетов задач и применяемых при их решении приёмов в книжку добавлены задачи с сайта И.В. Яковлева [3]. Эти задачи предлагались на ЕГЭ по математике, на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО, начиная с 2015 года.Ссылки на задачи из этого источника даны в виде [ЕГЭ, 2016], [МИОО, 2015] и пр. В книжку добавлены подготовительные задачи, раскрывающие идею решения некоторых задач в более простой ситуации, а также задачи, необходимые для более стройной структуры книжки и разнообразия тематики задач. Все авторские задачи, включённые в книжку, помечены звёздочкой [\*]. Среди них есть и простые, и сложные.

Решая задачи, связанные одним сюжетом, постараемся избегать однотипных задач, разбирая решения их только в том случае, когда на них можно показать разные способы решения или разную степень подробности обоснования решения. Дубли задач с другими числовыми данными оставлены для самостоятельного решения. Для ориентирования в сюжетах задач их список разбит на части, заголовки которых раскрывают тематику следующих за ними задач.

Последний вопрос, который надо обсудить в предисловии, звучит так: «А как работать с этой книжкой?» Ответ на него прост.

1. Пытайтесь решить каждую прочитанную задачу (более простые встречаются раньше). В случае неудачи постарайтесь продвинуться в решении как можно дальше. Это умение даст на ЕГЭ дополнительные баллы.

2. Если не получилось решить задачу самостоятельно, то разберите решение по книжке и постарайтесь понять, что вызвало ваше затруднение, где была допущена ошибка.

3. Попробуйте самостоятельно решить ту же задачу через некоторое время или похожую задачу.

**1. Наибольший доход фермера, или Метод Удодова-старшего**

Рассмотрим задачи на нахождение наибольшего дохода фермера.

**1.1.** У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель или свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га за центнер. Фермер может продавать картофель по 10 000 рублей за центнер, а свёклу — по цене 13 000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер? [2-20]

**Решение.** *I способ.* Пусть на первом поле *x* га занятокартофелем и   
(10 – *x*)га —свёклой, на втором поле *y* га занято картофелем и (10 – *y*)га — свёклой. Тогда доход в рублях вычислим по формуле:

(300*x* + 200*y*) ∙ 10 000 +  ∙ 13 000 =

= 100 000 ∙ (4*x* – 19*y* + 650).

Доход фермера будет наибольшим при наибольшем возможном значении *x* и наименьшем возможном значении *y*, т. е. при *x* = 10 и *y* = 0. Наибольший доход фермера равен 69 000 000 рублей.

*II способ.* Для самоконтроля решим задачу «по-нашему, по-неучёному», как говаривал Удодов-старший из рассказа А.П. Чехова «Репетитор».

1 га, занятый картофелем, на первом поле приносит 300 ∙ 10 000 =   
= 3 000 000 рублей дохода, а на втором — 200 ∙ 10 000 = 2 000 000 рублей дохода. 1 га, занятый свёклой, на первом поле приносит 200 ∙ 13 000 =   
= 2 600 000 рублей дохода, а на втором — 300 ∙ 13 000 = 3 900 000 рублей дохода. Картофель выгоднее сажать на первом поле, причём выгоднее, чем свёклу. Свёклу выгоднее сажать на втором поле, причём выгоднее, чем картофель. Наибольший доход составляет 3 000 000 ∙ 10 + 3 900 000 ∙ 10 =   
= 69 000 000 рублей.

**Ответ.** 69 000 000 рублей.

*Замечание.* Смущает неправдоподобная цена, по которой фермеру удаётся продавать картофель и свёклу: 100 рублей и 130 рублей за 1 кг соответственно! Это в 3-4 раза дороже, чем цены на картофель и свёклу в Москве с наценками посредников и магазина. Так, в апреле 2017 г. в Москве можно было купить мытый картофель в упаковке по 3 кг за 109,9 рублей, а свёклу — по 29,9 рублей за 1 кг. В следующих задачах цены чуть ближе к реальным.

**1.2.** У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель или свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 500 ц/га за центнер. Фермер может продавать картофель по 5 000 рублей за центнер, а свёклу — по цене 8 000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер? [1-14]

***Решение.*** 1 га, занятый картофелем, на первом поле приносит   
500 ∙ 5 000 = 2 500 000 рублей дохода, а на втором — 300 ∙ 5 000 = 1 500 000 рублей дохода. 1 га, занятый свёклой, на первом поле приносит 300 ∙ 8 000 =   
= 2 400 000 рублей дохода, а на втором — 500 ∙ 8 000 = 4 000 000 рублей дохода. Картофель выгоднее сажать на первом поле, причём выгоднее, чем свёклу, а свёклу — выгоднее сажать на втором поле, причём выгоднее, чем картофель. Наибольший доход составляет 2 500 000 ∙ 10 + 4 000 000 ∙ 10 =   
= 65 000 000 рублей.

**Ответ.** 65 000 000 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ===========**

**1.3.** У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель или свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га за центнер. Фермер может продавать картофель по 4 000 рублей за центнер, а свёклу — по цене 5 000 рублей за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер? [1-13]

=======================================================

**2. Наибольший доход владельца отеля**

**2.1.** Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть обычные номера площадью 27 м2 и номера «люкс» площадью 45 м2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 м2. Предприниматель может разделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? [2-8]

**Решение.** Сначала выясним, какой вид номеров приносит больший доход с 1 м2 своей площади. Так как = 74,0… меньше, чем = 88,8…, то владельцу отеля выгоднее иметь больше число номеров «люкс», чем обычных номеров.

Наибольшее возможное количество номеров «люкс» равно 21 — это   
945 м2 полезной площади, остаток площади (36 м2) позволяет сделать только 1 обычный номер. Доход в этом случае равен 21 ∙ 4 000 + 1 ∙ 2 000 = 86 000 рублей.

Если будет 20 номеров «люкс», то на остатке площади 81 м2 можно сделать 3 обычных номера. Доход в этом случае равен 20 ∙ 4 000 + 3 ∙ 2 000 =   
= 86 000 рублей.

Дальнейшее уменьшение количества номеров «люкс» приведёт к снижению дохода, так как излишка площади нет, а замена номеров «люкс» обычными номерами снижает доход.

**Ответ.** 86000 рублей.

**2.2.** Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть обычные номера площадью 21 м2 и номера «люкс» площадью 49 м2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 1099 м2. Предприниматель может разделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4500 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? [2-4]

**Решение.** Так как = 95,2… больше, чем = 91,8…, то владельцу отеля выгоднее иметь больше число обычных номеров, чем номеров «люкс».

Наибольшее возможное количество обычных номеров равно 52 — это   
1092 м2 полезной площади, остаток площади (7 м2) не позволяет сделать номер «люкс». Доход в этом случае равен 52 ∙ 2 000 = 104 000 рублей.

Если сделать 51 обычный номер, то на остатке полезной площади 28 м2 нельзя сделать 1 номер «люкс». Доход в этом случае уменьшится.

Если сделать 50 обычных номеров и 1 номер «люкс», то остатка полезной площади не будет. Доход будет равен 50 ∙ 2 000 + 1 ∙ 4 500 = 104 500 рублей.

Дальнейшее уменьшение количества обычных номеров приведёт к снижению дохода, так как излишка площади нет, а замена обычных номеров номерами «люкс» снижает доход.

**Ответ.** 104 500 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**2.3.** Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть обычные номера площадью 27 м2 и номера «люкс» площадью 45 м2. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 855 м2. Предприниматель может разделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 3000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель? [1-21]

=====================================================

**3. Наибольший доход от продажи ценных бумаг**

**3.1.** В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 25 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3 000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей? [1-23]

**Решение.**Если бы Алексей продал бумагу в начале 2001 года и положил вырученные деньги на банковский счёт, то ещё через 15 лет у него на счёте была бы сумма 25 ∙ 1,115 тыс. рублей. Если бы он сделал то же самое в начале 2002 года, то ещё через 14 лет у него на счёте была бы сумма 28 ∙ 1,114 тыс. рублей. Если увеличивать число лет, в течение которых Алексей не продаёт бумагу, то первый множитель в итоговой сумме будет увеличиваться на 3, а показатель степени второго множителя — уменьшаться на 1. Запишем итоговые суммы, соответствующие году продажи бумаги, и их изменение по сравнению с предыдущим годом (в тыс. рублей):

2001 г. — 25 ∙ 1,115,

2002 г. — 28 ∙ 1,114,       28 ∙ 1,114 – 25 ∙ 1,115 = 1,114 ∙ (28 – 25 ∙ 1,1) > 0,

2003 г. — 31 ∙ 1,113, 31 ∙ 1,113 – 28 ∙ 1,114 = 1,113 ∙ (31 – 28 ∙ 1,1) > 0,

2004 г. — 34 ∙ 1,112, 34 ∙ 1,112 – 31 ∙ 1,113 = 1,112 ∙ (34 – 31 ∙ 1,1) < 0.

Итоговая сумма увеличивается до 2003 года (включительно), впервые итоговая сумма уменьшится, если бумагу продать в начале 2004 года. Это означает, что бумагу надо продать в начале 2003 года.

**Ответ.** 2003.

**3.2.** В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 2 000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей? [2-16]

**Решение.**Если бы Алексей продал бумагу в начале 2001 года и положил вырученные деньги на банковский счёт, то ещё через 15 лет у него на счёте была бы сумма 7 ∙ 1,115 тыс. рублей. Если бы он сделал то же самое в начале 2002 года, то ещё через 14 лет у него на счёте была бы сумма 9 ∙ 1,114 тыс. рублей. Если увеличивать число лет, в течение которых Алексей не продаёт бумаги, то первый множитель в итоговой сумме будет увеличиваться на 2, а показатель степени второго множителя — уменьшаться на 1. Запишем итоговые суммы, соответствующие году продажи бумаги, и их изменение по сравнению с предыдущим годом в тыс. рублей):

2001 г. — 7 ∙ 1,115,

2002 г. — 9 ∙ 1,114,         9 ∙ 1,114 – 7 ∙ 1,115 = 1,114 ∙ (9 – 7 ∙ 1,1) > 0,

2003 г. — 11 ∙ 1,113, 11 ∙ 1,113 – 9 ∙ 1,114 = 1,113 ∙ (11 – 9 ∙ 1,1) > 0,

2004 г. — 13 ∙ 1,112, …

2005 г. — 15 ∙ 1,111, …

2006 г. — 17 ∙ 1,110, …

2007 г. — 19 ∙ 1,19, …

2008 г. — 21 ∙ 1,18, 21 ∙ 1,18 – 19 ∙ 1,19 = 1,18 ∙ (21 – 19 ∙ 1,1) > 0.

2009 г. — 23 ∙ 1,17, 23 ∙ 1,17 – 21 ∙ 1,18 = 1,17 ∙ (23 – 21 ∙ 1,1) < 0.

Итоговая сумма увеличивается до 2008 года, впервые итоговая сумма уменьшится, если бумагу продать в начале 2009 года. Это означает, что бумагу надо продать в начале 2008 года.

**Ответ.** 2008.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**3.3.** В начале 2001 года Алексей приобрёл ценную бумагу за 19 000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 3 000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей? [2-39]

======================================================

**3.4.** Алексей приобрёл цен­ную бу­ма­гу за 8 тыс. рублей. Цена бу­ма­ги каж­дый год воз­рас­та­ет на 1 тыс. рублей. В любой мо­мент Алек­сей может про­дать бу­ма­гу и по­ло­жить вы­ру­чен­ные день­ги на бан­ков­ский счёт. Каж­дый год сумма на счёте будет уве­ли­чи­вать­ся на 8 %. В те­че­ние ка­ко­го года после по­куп­ки Алек­сей дол­жен про­дать цен­ную бумагу, чтобы через два­дцать пять лет после по­куп­ки этой бу­ма­ги сумма на бан­ков­ском счёте была наибольшей? [Ди­а­гн. ра­бо­та 13.02.2015]

**Решение.**Если бы Алексей продал бумагу в начале 1-го года и положил вырученные деньги на банковский счёт, то ещё через 25 лет у него на счёте была бы сумма 8 ∙ 1,0825 тыс. рублей. Если бы он сделал то же самое в начале 2-го года, то ещё через 24 года у него на счёте была бы сумма 9 ∙ 1,0824 тыс. рублей. Если увеличивать число лет, в течение которых Алексей не продаёт бумагу, то первый множитель в итоговой сумме будет увеличиваться на 1, а показатель степени второго множителя — уменьшаться на 1. Запишем итоговые суммы, соответствующие году продажи бумаги, и их изменение по сравнению с предыдущим годом в тыс. рублей):

1-й год — 8 ∙ 1,0825,

2-й год — 9 ∙ 1,0824,         9 ∙ 1,0824 – 8 ∙ 1,0825 = 1,0824 ∙ (9 – 8 ∙ 1,08) > 0,

3-й год — 10 ∙ 1,0823,      1,0823 ∙ (10 – 9 ∙ 1,08) > 0,

4-й год — 11 ∙ 1,0823,      1,0822 ∙ (11 – 10 ∙ 1,08) > 0,

5-й год — 12 ∙ 1,0823,      1,0821 ∙ (12 – 11 ∙ 1,08) > 0,

6-й год — 13 ∙ 1,0823,      1,0820 ∙ (13 – 12 ∙ 1,08) > 0,

7-й год — 14 ∙ 1,0823,      1,0819 ∙ (14 – 13 ∙ 1,08) < 0.

Итоговая сумма увеличивается до 6-го года, впервые итоговая сумма уменьшится, если бумагу продать в течение 7-го года. Это означает, что бумагу надо продать в те­че­ние ше­сто­го года.

**Ответ.** В те­че­ние ше­сто­го года.

**4. На сколько процентов больше или меньше?**

При решении экономических задач нужно свободно владеть процент­ными расчётами. Рассмотрим подготовительные задачи, объясняющие, как узнавать, на сколько процентов одно число больше (меньше) второго.

**4.1.** На сколько процентов число *a* больше, чем число *b*? [\*]

**Решение.** Число*a* составляет числа *b*, или числа *b*. Число *a* больше, чем число *b* на – 100 % = , т. е.

|  |
| --- |
| чтобы узнать, на сколько процентов число *a* больше, чем число *b*, надо из большего числа вычесть меньшее, разность разделить на то число, с которым сравниваем, и результат умножить на 100 %:  . |

**Ответ.** На .

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**4.2.** На сколько процентов число *b* меньше, чем число *a*? [\*]

======================================================

**4.3.** а) Мастер Иванов может выкопать колодец за 10 дней, а его ученик Петров — за 15 дней. Они договорились работать вместе и выкопали колодец за 5 дней. На сколько процентов возросла производительность труда каждого при совместной работе? Считайте, что производительность труда каждого постоянна, а при совместной работе она увеличилась в одно и то же число раз, или на одно и то же число процентов.

б) На сколько процентов увеличится зарплата каждого в день, если совместно заработанные деньги они делят пропорционально производитель­ности труда каждого? [\*]

**Решение.** а) Примем всю работу по рытью колодца за 1. Мастер Иванов за день выполняет работы, а его ученик — работы. Если бы производительность не увеличивалась при совместной работе, что то за день они выполняли бы работы, а фактически они выполняли в день работы. То есть при совместной работе производительность труда увеличилась на = 20 %. Так как производительность труда каждого при совместной работе увеличилась на одно и то же число процентов, то это увеличение составило 20 %.

б) Так как при совместной работе производительность труда каждого увеличилась на 20 %, то объём работы, выполняемой каждым в день увеличился на 20 %. Оплата труда пропорциональна объёму выполненной работы, поэтому зарплата каждого за день увеличится на 20 %.

**Ответ.** а) На 20 %; б) на 20 %.

**4.4.** Остап Бендер купил для «Антилопы-Гну» 4 новых колеса. Передние колёса автомобиля изнашиваются через 12 тыс. км пробега, а задние — через 8 тыс. км пробега.

а) Какой наибольший путь может проехать «Антилопа-Гну», если Адам Козлевич догадается вовремя поменять задние колёса с передними?

б) На сколько процентов при этом увеличится пробег автомобиля по сравнению с 8 тыс. км? [\*]

**Решение.** а) Если бы задние колёса меняли с передними через каждую тысячу кило­метров, то на 2 тыс. км расходовалось бы ресурса каждого колеса. То есть 2 тыс. км составляют наибольшего пути, который равен 2 : = 9,6 тыс. км.

б) Пробег автомобиля по сравнению с 8 тыс. км увеличится на = 20 %.

**Ответ.** а) 9,6 тыс. км; б) на 20 %.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**4.5.** Теплоход выполнял туристические поездки на 50 км против течения и 50 км по течению. Капитан теплохода знает, что обычного запаса топлива хватает, чтобы проплыть 100 км против течения или 150 км по течению реки.

а) На какое наибольшее расстояние теплоход может отплыть по реке с тем же запасом топлива, чтобы его хватило и на обратный путь? (Двигатель должен работать во время движения туда и обратно.)

б) На сколько процентов можно увеличить стоимость экскурсии, если она пропорциональна длине маршрута? [\*]

======================================================

**4.6.** В кризис Иван Петрович не доверял банкам и хранил сбережения дома. Крупная сумма денег пролежала дома с зимы до лета. За это время цены на товары выросли в среднем на 50 %. На сколько процентов уменьшилась покупательная способность отложенных денег? [\*]

**Решение.** Пусть зимой на а руб. можно было купить одну единицу товара. Летом этот товар стоил а + 0,5а = 1,5а, т. е. летом на те же а р. можно было купить а : 1,5а = единицы того же товара. Это на 1 – = единицы товара, или на 33 % меньше, чем зимой. Покупательная способность отложенных денег уменьшилась на 33 %.

**Ответ.** На 33 %.

**4.7.** Василий Иванович является владельцем акций двух компаний. Стоимость приобретенных им акций компании А вдвое превышает стоимость акций компании Б. На сколько процентов увеличится общая стоимость акций Василия Ивановича, если цена акций компании А увеличится на 30 %, а цена акций компании Б увеличится на 60 %? [\*]

**Решение.** Пусть у Василия Ивановича акций компании Б на *x* руб. и акций компании А на 2*x* руб., всего на 3*x* руб. После увеличения цен акций они будут стоить 1,6∙*x* + 1,3∙2*x* = 4,2*x* руб. Стоимость акций увеличилась на = 40 %.

**Ответ.** На 40 %.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**4.8.** Иван Васильевич является владельцем акций двух компаний. Стоимость приобретенных им акций компании А в четыре раза превышает стоимость акций компании Б. На сколько процентов увеличится общая стоимость акций Ивана Васильевича, если цена акций компании А увеличится на 50 %, а цена акций компании Б увеличится на 25 %? [\*]

==================================================

**4.9.** За некоторый промежуток времени цена доллара в рублях увеличилась на 25 %. На сколько процентов при этом уменьшилась цена рубля в долларах? [\*]

**Решение.** Пусть 1 доллар стоил n рублей, тогда 1 рубль стоил доллара. После увеличения цены доллара в рублях на 25 % он стал стоить рублей, и теперь 1 рубль стоит 1 : = доллара. Стоимость 1 рубля в долларах при этом уменьшилась на от доллара, или на 20 %.

**Ответ.** На 20 %.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**4.10.** В некотором царстве, в некотором государстве цена 1 единицы местной валюты в долларах уменьшилась на 50 %. На сколько процентов при этом увеличилась цена доллара в единицах местной валюты? [\*]

=======================================================

**4.11.** При увеличении производительности труда рабочего на 25 % его зарплату увеличили на 20 %. На сколько процентов снизился расход на оплату труда в расчёте на единицу продукции. [\*]

**Решение.** Пусть за изготовление *а* деталей рабочий получал *b* руб*.* На 1 деталь приходилось руб*.* Увеличив производительность труда на 25 %, рабочий сделал 1,25*а* деталей и получил за них 1,2*b* руб*.* Теперь на 1 деталь приходится *=* 0,96 ⋅ руб*. —* это на 4 % меньше, чем руб*.*

**Ответ.** На 4 %.

**============Задачи для самостоятельного решения ============**

**4.12.** Рабочий повысил производительность труда на 40 %. При этом его зарплата увеличилась на 26 %. На сколько процентов уменьшился расход на оплату труда в расчёте на единицу продукции? [\*]

**4.13.** Магазин выставил на продажу товар с наценкой 40 % от закупочной цены. После продажи 0,75 всего товара магазин снизил назначенную цену на 40 % и распродал оставшийся товар. Сколько процентов от закупочной цены товара составила прибыль магазина? [ЕГЭ, 2007]

=======================================================

**5. Оценка выгодности условий**

**5.1.** По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А». [МИОО, 2015]

**Решение.** Проведём сравнение условий двух вкладов для одной и той же суммы *a* рублей (далее вычисления в рублях).

За три года на вкладе «А» сумма *a* превратится в 1,13*a*.

За три года на вкладе «Б» сумма *a* превратится в 1,112 ∙ *a*, где *n* — целое число процентов за третий год по вкладу «Б».

Чтобы вклад «Б» был выгоднее вклада «А», должно выполняться неравенство:

1,112 ∙ *a* > 1,13*a*.

Разделив неравенство на положительное *a*, получим неравенство, равносильное предыдущему:

1,112 ∙ > 1,13. (1)

Требуется найти наименьшее целое число *n*, для которого неравенство (1) верно. Будем уменьшать *n* от 11.

При *n* = 11 неравенство (1) верно, так как 1,113 > 1,13.

При *n* = 10 неравенство (1) верно, так как 1,112 ∙ 1,1 > 1,13.

При *n* = 9 неравенство (1) верно, так как 1,112 ∙ 1,09 = 1,134… > 1,331.

А при *n* = 8 неравенство (1) неверно, так как 1,112 ∙ 1,08 = 1,1330… < 1,331.

Следовательно, наименьшее целое значение *n*, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А», равно 9.

**Ответ.** 9.

**5.2.** По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5 % в первый год и на одинаковое целое число *n* процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение *n*, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов. [МИОО, 2016]

**Решение.** Проведём сравнение условий двух вкладов для одной и той же суммы *a* рублей (далее вычисления в рублях).

За три года на вкладе «А» сумма *a* превратится в 1,13*a*.

За три года на вкладе «Б» сумма *a* превратится в 1,05 ∙ *a*, где *n* — целое число процентов и за второй, и за третий годы.

Чтобы вклад «Б» был выгоднее вклада «А», должно выполняться неравенство:

1,05 ∙ *a* > 1,13*a*.

Разделив неравенство на положительное *a*, получим неравенство, равносильное предыдущему:

1,05 ∙ > 1,13. (1)

Требуется найти наименьшее целое число *n*, для которого неравенство (1) верно.

При *n* = 10 неравенство (1) неверно, так как 1,05 ∙ < 1,13.

При *n* = 11 неравенство (1) неверно, так как 1,05 ∙ = 1,29… < 1,331.

При *n* = 12 неравенство (1) неверно, так как 1,05 ∙ = 1,31… < 1,331.

А при *n* = 13 неравенство (1) верно, так как 1,05 ∙ = 1,34… > 1,331.

Следовательно, наименьшее целое значение *n*, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А», равно 13.

**Ответ.** 13.

Давайте перенесёмся в 1993 год, в период бурного роста цен и больших процентных ставок по вкладам, c которыми связана интересная задача.

Сбербанк России с 1 октября 1993 г. за хранение денег на депозитном вкладе в течение года, 6 и 3 месяцев выплачивал доход в размере 150 %, 130 % и 120 % годовых соответственно. При этом по вкладу на 6 месяцев можно было получить = 65 % дохода, а по вкладу на 3 месяца можно было получить = 40 % дохода.

Расчёты показывают, что при двукратном вложении денег на 6 месяцев и четырёхкратном на 3 месяца можно было получить 172,5 % и 185,61 % соответственно, что заметно превышало 150 % годовых. Таким образом, вкладчики имели возможность получить выигрыш за счёт более выгодного использования условий Сбербанка России.

Описанная ситуация поставила естественную задачу, которую нужно было бы решить руководству Сбербанка России, если бы оно считало нежелательным многократное использование клиентами вкладов на 3 и 6 месяцев при заданной процентной ставке для вкладов на 1 год. Заметим, что наши расчёты имеют чисто теоретическое значение, так как на принятие решения о величине процентной ставки по вкладам могут влиять самые разные причины. Сформулируем задачу в общем виде.

**5.3.** Каким наибольшим целым числом x должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 1 год под р % годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший, чем вклад на 6 месяцев? Найдите x и y, если p = 150. [\*]

**Решение.** Пусть в начале года положили *а* рублейпод *р* % годовых. В конце года получат рублей.Если бы положили *а* рублейпод *х*%годовых на 6 месяцев, полученную через полгода сумму, увеличенную на  %, ещё раз положили на 6 месяцев, то в конце года получили рублей.По условию задачи первый результат должен быть больше второго, т. е. должно выполняться неравенство:

> ,

которое перепишем в виде:

*х*2 + 400*х* – 400*р* < 0. (1)

Вычислим корни квадратного трёхчлена:

 = 40000 + 400*р* = 400(100 *+ р*);

*x*1 *=* –200 – 20, *х*2 *=* –200 + 20.

Решения неравенства (1) составляют промежуток

–200 – 20 < *х* < –200 + 20. (2)

При *р =* 150 имеем:

*х* < –200 + 20 = –200 + 20 = 116,2...,

откуда наибольшее целое значение *х*наиб. *=* 116.

Проверим полученный результат. Двукратное вложение денег на 6 месяцев под 116 % годовых увеличит вклад в  = 2,49... раза, т. е. меньше, чем на 150 %; а под 117 % годовых — увеличит вклад в  =   
= 2,51... раза, т. е. больше, чем на 150 %.

Пусть теперь известна процентная ставка *х* по вкладам на 6 месяцев. Определим наибольшее целое число *y*, которым должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход, меньший *х*%.Дальше можно полностью повторить рассуждения по приведенной выше схеме или получить результат из неравенства (2) подстановкой *p* = , *х* = :

–200 – 20 <  < –200 + 20,

откуда получим:

–400 – 20 < *y* < –400 + 20. (3)

При *х =* 116 имеем:

*у <* –400 + 20 = –400 + 20 = 102,7...,

следовательно, наибольшее целое значение *у* наиб. *=* 102.

Проверка, показывает, что двукратное вложение денег на 3 месяца под 102 % годовых увеличит вклад в  = 1,575… раза, т. е. меньше, чем на = 58 %; а под 103 % годовых — увеличит вклад в  = 1,581... раза, т. е. больше, чем на 58 %.

Таким образом, мы получили неравенства (2) и (3), с помощью которых по заданному проценту *р* для депозитных вкладов на 1 год можно вычислить процент годовых *х* для вкладов на 6 месяцев, а по нему — процент годовых *у* для вкладов на 3 месяца. При указанных процентах *х* и *у* многократное использование вкладов на 6 и 3 месяца вместо одного вклада на 1 год становится невыгодным.

**Ответ.** Если *p* = 150, то *x* = 116, *y* = 102.

Отметим, что не прошло и года, как приведённые выше процентные ставки по депозитным вкладам Сбербанка России были изменены. Интересно не то, что они уменьшились, тем более не то, что сей факт случился после публикации решения этой задачи в журнале «Квант» (это, разумеется, совпадение), а то, что новые процентные ставки (70, 60 и 50 процентов для депозитных вкладов на год, 6 и 3 месяца соответственно) удовлетворяли неравенствам (2) и (3), чем и лишили дополнительного дохода наиболее сообразительных вкладчиков Сбербанка России.

Прочитав приведённое выше уж очень «взрослое» решение, наш читатель вполне может высказаться об авторе книжки словами Дашеньки из пьесы А.П. Чехова «Свадьба»: «Они хочут свою образованность показать и всегда говорят о непонятном». Для самооправдания автору придётся показать и «детское» решение похожей задачи методом обоснованного перебора целых значений.

**5.4.** В некотором царстве, в некотором государстве ставка для депозитных вкладов на 1 год равна 100 %. Каким наибольшим целым числом х должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 1 год под 100 % годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 6 месяцев? [\*]

**Решение.** За год вклад a рублей (расчёты ведутся в валюте этого царства-государства) под 100 % годовых обратится в сумму 2a, т. е. увеличивается в 2 раза. Проверим несколько целых значений годовой процентной ставки x % на 6 месяцев. За этот срок вклад увеличится на %, или в раза.

Если x = 70, то за два срока по полгода вклад увеличится в =   
= 1,8…, т. е. меньше, чем в 2 раза. Следующие вычисления запишем короче:

если x = 80, то вклад увеличится в = 1,96 раза;

если x = 82, то вклад увеличится в = 1,9881 раза;

если x = 83, то вклад увеличится в = 2,002 раза.

Наименьшее целое значение x равно 82.

За 6 месяцев при ставке 82 % годовых вклад увеличится на 41%, то есть в 1,41 раза. Проверим несколько целых значений годовой процентной ставки y % на 3 месяца. За этот срок вклад увеличится на %, или в раза.

Если y = 72, то за два срока по четверть года вклад увеличится в = 1,39…, т. е. меньше, чем в 1,41 раза. Следующие вычисления запишем короче:

если y = 74, то вклад увеличится в = 1,40… раза;

если x = 75, то вклад увеличится в = 1,4101… раза.

Наименьшее целое значение y равно 74.

**Ответ.**Если *p* = 100, то *x* = 82, *y* = 74.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**5.5.** В некотором царстве, в некотором государстве ставка для депозитных вкладов на 1 год равна 80 %. Каким наибольшим целым числом х должен выражаться процент годовых для депозитных вкладов на 6 месяцев, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 1 год под 80 % годовых? Каким наибольшим целым числом y должен выражаться процент годовых для вкладов на 3 месяца, чтобы двукратное использование этого вклада приносило доход меньший, чем вклад на 6 месяцев? [\*]

======================================================

**5.6.** В июле планируется взять кредит на сумму 4 026 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Пусть *a* = 4 026 000 рублей и пусть при погашении кредита за 2 года ежегодная выплата составляет *x* рублей (далее вычисления ведутся в рублях). Составим первое уравнение:

1,2(1,2*a* – *x*) – *x* = 0,

решив которое относительно *x*, получим

*x* = ,

*x* = 2 635 200.

Пусть при погашении кредита за 4 года ежегодная выплата составляет *y*. Составим второе уравнение:

1,2(1,2(1,2(1,2*a* – *y*) – *y*) – *y*) – *y* = 0,

1,24*a* – 1,23*y* – 1,22*y* – 1,2*y* – *y* = 0,

решив которое относительно *y*, получим

*y* = ,

*y* = 1 555 200.

Если кредит будет полностью погашен за 4, а не за 2 года, то придётся отдать больше на

4*y* – 2*x* = 4 ∙ 1 555 200 – 2 ∙ 2 635 200 = 950 400 рублей.

**Ответ.** На 950 400 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**5.7.** В июле планируется взять кредит на сумму 4 641 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом прошлого года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)? [\*]

======================================================

**6. Проекты с дополнительным вложением средств**

**6.1.** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число *n* млн рублей в первый и второй годы, а также целое число *m* млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения *n* и *m*, при которых первоначальные вложения за два года, как минимум, удвоятся, а за четыре года, как минимум, утроятся. [МИОО, 2016]

**Решение.** Первоначальными вложениями здесь названы 10 млн рублей. Рассмотрим изменения средств (в млн рублей), вложенных в проект, за первые два года. В конце первого года сумма 10 увеличилась в 1,15 раза и к ней прибавили *n*. В конце второго года те же действия выполнили с суммой   
11,5 + *n*.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Годы | В начале года | В конце года |
| 1 | 10 | 1,15 ∙ 10 + *n* = 11,5 + *n* |
| 2 | 11,5 + *n* | 1,15(11,5 + *n*) + *n* = 13,225 + 2,15*n* |

Так как первоначальные вложения за два года, как минимум, удвоятся, то верно неравенство:

13,225 + 2,15*n* 20,

2,15*n* 6,775. (1)

Так как *n* — число целое и при *n* = 3 неравенство (1) неверно, а при *n* = 4 верно, то наименьшее целое число *n*, для которого неравенство (1) верно, равно 4.

Продолжим заполнение таблицы, согласно условиям задачи, для 3-го и   
4-го годов, учитывая, что *n* = 4.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Годы | В начале года | В конце года |
| 3 | 21,825 | 1,15 ∙ 21,825 + *m* |
| 4 | 1,15 ∙ 21,825 + *m* | 1,15(1,15 ∙ 21,825 + *m*) + *m* |

Так как первоначальные вложения за четыре года, как минимум, утроятся, то верно неравенство:

1,15(1,15 ∙ 21,825 + *m*) + *m* 30,

1,322521,825 + 2,15*m* 30. (2)

Так как *m* — число целое и при *m* = 0 неравенство (2) неверно, а при *m* = 1 верно, то наименьшее целое число *m*, для которого неравенство (2) верно, равно 1.

**Ответ.** 4 и 1 млн рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**6.2.** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число *n* млн рублей в первый и второй годы, а также целое число *m* млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения *n* и *m*, при которых первоначальные вложения за два года, как минимум, удвоятся, а за четыре года, как минимум, увеличатся в 4 раза. [\*]

====================================================

**6.3.** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей. [МИОО, 2016]

**Решение.** Пусть первоначальные вложения составили целое число —   
*x* млн рублей. В конце первого года сумма x увеличилась в 1,2 раза и к ней прибавили 20 (все расчёты в млн рублей). В конце второго года те же действия выполнили с суммой 1,2*x* + 20.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Годы | В начале года | В конце года |
| 1 | *x* | 1,2*x* + 20 |
| 2 | 1,2*x* + 20 | 1,2(1,2*x* + 20) + 20 = 1,44*x* + 44 |

Так как первоначальные вложения за два года стали больше 150, то верно неравенство:

1,44*x* + 44 > 150,

*x* > 73,6… . (1)

Продолжим заполнение таблицы, согласно условиям задачи, для 3-го и   
4-го годов.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Годы | В начале года | В конце года |
| 3 | 1,44*x* + 44 | 1,2(1,44*x* + 44) + 10 = 1,728*x* + 62,8 |
| 4 | 1,728*x* + 62,8 | 1,2(1,728*x* + 62,8) + 10 = 2,0736*x* + 85,36 |

Так как первоначальные вложения за четыре года стали больше 250, то верно неравенство:

2,0736*x* + 85,36 > 250,

*x* > 79,3… . (2)

Наименьшее целое число *x*, удовлетворяющее неравенствам (1) и (2), равно 80. Следовательно, наименьший размер первоначальных вложений составил 80 млн рублей.

**Ответ.** 80 млн рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**6.4.** По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 10 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 10 млн рублей в первый и второй годы, а также по 20 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 140 млн рублей, а за четыре года станут больше 212 млн рублей. [\*]

======================================================

**7. Прибыль и квадратичная функция**

**7.3.** Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство *x* тыс. ед. продукции на таком заводе равны 0,5*x*2 + 2*x* + 6 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене *p* тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит   
*px* − (0,5*x*2 + 2*x* + 6). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении *p* строительство завода окупится не более, чем за 3 года? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Прибыль фирмы за один год (в млн рублей) составит

*px* − (0,5*x*2 + 2*x* + 6) = −0,5*x*2 + (*p –* 2)*x* – 6.

Квадратичная функция

*y* = −0,5*x*2 + (*p –* 2)*x* – 6 (1)

достигает наибольшего значения в точке *x* = *p –* 2, следовательно, прибыль за год будет наибольшей, если *x* = *p –* 2. Эта наибольшая прибыль равна

–0,5(*p –* 2)2 + (*p –* 2)2 – 6 = 0,5(*p –* 2)2 – 6,

а за 3 года наибольшая прибыль составит 1,5(*p –* 2)2 – 18.

Найдём наименьшее значение *p*, при котором верно неравенство:

1,5(*p –* 2)2 – 18 ≥ 78,

1,5(*p –* 2)2 ≥ 96,

(*p –* 2)2 ≥ 64.

Так как случай *p* – 2 ≤ –8 не отвечает условиям задачи, то *p –* 2 ≥ 8, *p* ≥ 10. Следовательно, строительство завода окупится не более, чем за 3 года, при наименьшем значении *p* = 10.

**Ответ.** 10.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**7.4.** Строительство нового завода стоит 48 млн рублей. Затраты на производство *x* тыс. ед. продукции на таком заводе равны 0,5*x*2 + 4*x* + 2 млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене *p* тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит   
*px* − (0,5*x*2 + 4*x* + 2). Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении *p* строительство завода окупится не более, чем за 4 года? [\*]

**=======================================================**

**7.5.** Зависимость объёма *Q* (в шт.) купленного у фирмы товара от цены *P* (в руб. за шт.) выражается формулой *Q* = 15000 − *P,* 1000 *≤ P ≤* 15000. Доход от продажи товара составляет *PQ* рублей. Затраты на производство *Q* единиц товара составляют 3000*Q* + 5000000 рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20 %, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.**Согласно условиям задачи, доход равен *PQ* = *P*(15000 − *P*) =   
= –*P*2 + 15000*P*, а затраты на производство *Q* единиц продукции составляют   
*Z* = 3000*Q* + 5000000 = 3000(15000 − *P*) + 5000000 = 50000000 – 3000*P* (все расчёты ведутся в рублях).

Прибыль равна

*PQ* – *Z* = –*P*2 + 15000*P* – 50000000 + 3000*P* =  
 = –*P*2 + 18000*P* – 50000000 = –(*P* – 9000)2 + 31000000. (1)

Как видим, прибыль выражается квадратичной функцией аргумента *P*, она достигает наибольшего значения, если *P* = 9000.

В результате понижения начальной цены *P* на 20 % она стала равной 0,8*P*. Проведя аналогичные вычисления для цены 0,8*P*, или подставив 0,8*P* вместо *P* в формулу (1) для вычисления прибыли, мы получим, что прибыль для пониженной цены равна –(0,8*P* – 9000)2 + 31000000.

Согласно условиям задачи, прибыль не изменилась, составим уравнение:

–(*P* – 9000)2 + 31000000 = –(0,8*P* – 9000)2 + 31000000,

(*P* – 9000)2 = (0,8*P* – 9000)2,

откуда получим, что *P* = 0 или *P* = 10000. Условиям задачи отвечает лишь второй корень.

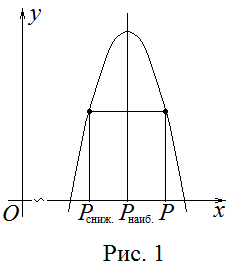
Итак, начальная цена *P* равна 10000, после снижения на 20 % она стала равна 0,8*P* = 8000. Цену 8000 надо повысить до 9000, чтобы прибыль была наибольшей, т. е. её надо увеличить на = 12,5 %.

*II вариант.* Будем считать, что в приведённом выше решении прибыль выражается квадратичной функцией

*y*(*x*) = –*x*2 + 18000*x* – 50000000 (2)

аргумента *x* (цена товара), и что с помощью этой функции формула (1) выражает прибыль *y* (*P*)= –*P*2 + 18000*P* – 50000000 для значения *x* = *P* первоначальной цены.

График функции (2) — парабола, абсцисса вершины которой *x*. = 9000. Это и есть цена *P*наиб. товара, при которой достигается наибольшая прибыль. График симметричен относительно прямой *x* = 9000. По условию задачи цена *P* товара снижена на 20 %, Сниженная цена равна *P*сниж. = 0,8P.

Прибыль, полученная при цене P, оказалась равной прибыли, полученной при цене 0,8P, т. е. квадратичная функция (2) принимает одинаковые значения при *x = P* и при *x =* 0,8*P*. Это означает, что точки графика, соответствующие первоначальной цене товара *x = P* и сниженной его цене *x =* 0,8P симметричны относительно прямой *x* = 9000 (рис. 1). Тогда *P*наиб. = = 0,9P. Чтобы увеличить цену с 0,8P до 0,9P, её надо увеличить на = 12,5 %.

**Ответ.** На 12,5 %.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**7.6.** Зависимость объёма *Q* (в шт.) купленного у фирмы товара от цены *P* (в руб. за шт.) выражается формулой *Q* = 5000 − *P,* 1000 *≤ P ≤* 5000. Доход от продажи товара составляет *PQ* рублей. Затраты на производство *Q* единиц товара составляют 4000*Q* + 1000000 рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Во время рекламной акции фирма уменьшила цену продукции на 50 %, однако её прибыль не изменилась. На сколько процентов следует после рекламной акции увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли? [\*]

**======================================================**

*Замечание*. При решении задачи числа 5000, 4000 и 1000000 можно не использовать для получения ответа.

В 2015 году в вариантах ЕГЭ по математике появились задачи про кредиты, требующие не столько много математики, сколько умения выстраивать план решения задачи и вести аккуратные вычисления. В разных источниках, и даже в одном, в условиях некоторых задач одни и те же величины обозначаются разными буквами. На контрольной работе или экзамене это, видимо, не так мешает, так как ученик решает одну задачу, но в рамках книжки лучше иметь одинаковые обозначения для разных задач. Сумму кредита мы обозначаем a, процентную ставку платежа (выплаты) — r, процентную ставку за кредит — p.

**8. Кредиты с известными платежами**

**8.1. Найти сумму кредита (вклада)**

**8.1.** 15 июля 2012 года взяли кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— 1-го января каждого года долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит с февраля по июнь каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен двумя равными платежами по 4 548 600 рублей (т. е. за два года). Какую сумму банк выдал в кредит? [1-29]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме a тыс. рублей (далее все суммы указаны в тыс. рублей). 1-го января 2013 года долг увеличился на 14 %, т. е. в 1,14 раз. После первой выплаты части долга остаток долга составил   
a ∙ 1,14 – 4 548,6. После второй выплаты части долга расчёт был закончен, составим уравнение:

(a ∙ 1,14 – 4 548,6) ∙ 1,14 – 4 548,6 = 0.

Разделив уравнение на 1,142, получим равносильное ему уравнение:

a – 3 990 – 3 500 = 0,

имеющее единственный корень a = 7 490, следовательно, кредит взят в сумме 7 490 000 рублей.

**Ответ.** 7 490 000 рублей.

**8.2.** В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы: — каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года; — с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей. Сколько млн рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Пусть взято в кредит a рублей (далее все суммы указаны в рублях). В январе сумма долга увеличится на 20 %, т. е. в 1,2 раза. Затем выплачивают банку *x* = 2 160 000, за 3 года расчёты по кредиту будут завершены. Составим уравнение:

(1,2(1,2(1,2*a – x*) *– x*) *– x* = 0.

Раскрыв скобки в левой части уравнения, получим:

1,23*a –* 1,22*x –* 1,2*x – x* = 0,

1,728*a* =3,64*x*,

*a* = .

Осталось вычислить значение дроби:

= = 4 550 000.

Итак, в кредит было взято 4 550 000 рублей.

**Ответ.** 4 550 000 рублей.

**8.3.** Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10 % по сравнению с его размером в начале года, а, кроме того, в начале третьего и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей. [ЕГЭ, 2016]

**Решение.** Пусть первоначальный вклад составляет целое число — *a* млн рублей (далее все суммы в млн рублей). Ежегодно вклад увеличивается в 1,1 раза — в каждой строке таблицы число из 2-го столбца умножили на 1,1. В начале 3-го и 4-го годов прибавили по 3 млн рублей.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Год | Вклад в начале года | Вклад в конце года |
| 1 | *a* | 1,1*a* |
| 2 | 1,1*a* | 1,12*a* |
| 3 | 1,12*a* + 3 | 1,1(1,12*a* + 3) |
| 4 | 1,1(1,12*a* + 3) + 3 | 1,1(1,1(1,12*a* + 3) + 3) |

Так как вклад после 4 лет должен быть меньше 25 млн рублей, то должно выполняться неравенство:

1,1(1,1(1,12*a* + 3) + 3) < 25,

1,4641*a* < 18,07. (1)

Так как *a* число целое, то нетрудно убедиться, что для *a* = 12 неравенство (1) выполняется, так как 17,5692 < 18,07, а для *a* = 13 — нет, так как   
19,0333 > 18,07. Следовательно, наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей, составляет 12 млн рублей.

**Ответ.** 12 000 000 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**8.4.** 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму денег в кредит под 11 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 11 %), затем Василий переводит в банк 3 696 300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (т. е. за два года)? [2-42]

**======================================================**

**8.5.** 31 декабря 2017 года Полина взяла кредит в банке под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Полина переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Она знает, что ежегодно сможет выплачивать за кредит 1 000 000 рублей. Каким наибольшим целым числом миллионов рублей может выражаться сумма кредита, чтобы Полина выплатила долг тремя равными ежегодными платежами (сумма последнего платежа может быть меньше 1 000 000 рублей)? [\*]

**Решение.** Пусть сумма кредита составила *a* млн рублей (все расчёты в млн рублей). Тогда остатки долга по годам составили:

1 год — 1,1*a –* 1,

2 год — 1,1(1,1*a* – 1) – 1 = 1,21*a* – 2,1,

3 год — 1,1(1,21*a* – 2,1) – 1 = 1,331*a* – 3,31.

За три года расчёт по кредиту должен быть завершён, последний остаток не должен превышать 0, поэтому должно выполняться неравенство:

1,331*a* – 3,31 0,

1,331*a* 3,31. (1)

Так как *a* — число целое и при *a* = 2 неравенство (1) верно, а при *a* = 3 — неверно, то наибольшая сумма кредита в целое число миллионов рублей равно 2.

**Ответ.** 2 000 000 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**8.6.** 31 декабря 2017 года Леонид взял кредит в банке под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Леонид переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Он знает, что ежегодно сможет выплачивать за кредит 2 000 000 рублей. Каким наибольшим целым числом миллионов рублей может выражаться сумма кредита, чтобы Леонид выплатил долг четырьмя равными ежегодными платежами (сумма последнего платежа может быть меньше 2 000 000 рублей)? [\*]

**======================================================**

**8.2. Найти время расчёта за кредит**

**8.7.** 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1-го числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1 %), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей? [2-14]

**Решение.** I способ. Чтобы рассчитаться за кредит в наименьшее число месяцев, Александр Сергеевич должен каждый месяц выплачивать наибольшую возможную сумму, т. е. 275 тыс. рублей (далее все суммы указаны в тыс. рублей). Тогда через месяц его долг увеличится на 1 %, или в 1,01 раза и составит 1100 ∙ 1,01 = 1111. После выплаты платежа остаток долга составит 1111 – 275 = 836. Запишем расчёты по месяцам:

через 1 месяц остаток долга составит 1100 ∙ 1,01 – 275 = 836;

через 2 месяца остаток долга составит 836 ∙ 1,01 – 275 = 569,36;

через 3 месяца остаток долга составит 569,36 ∙ 1,01 – 275 = 300,0536;

через 4 месяца остаток долга составит 300,0536 ∙ 1,01 – 275 = 28,05413.

В конце пятого месяца Александр Сергеевич рассчитается с долгом, делая ежемесячные выплаты не более 275 тыс. рублей.

Итак, минимальное число месяцев — 5.

II способ. Вычисления в первом способе решения задачи громоздки, остаток долга на пятый месяц так мал, что возникает идея решить задачу не точными вычислениями, а с помощью оценок результатов. За 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 275 ∙ 4 = 1100 тыс. рублей, т. е. всю сумму кредита и в пятый месяц ему останется выплатить проценты по кредиту. Оставшаяся сумма будет меньше, чем

1100 ∙ 1,015 – 1100 < 1100 ∙ 1,1 – 1100 = 110 < 275 тыс. рублей.

Поэтому 5 месяцев — это наименьший срок расчёта за кредит.

**Ответ.** 5 месяцев.

**8.8.** Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 000 рублей? [МИОО, 2015]

**Решение.** Чтобы рассчитаться за кредит в наименьшее количество лет, Оля должна каждый год выплачивать наибольшую возможную сумму, т. е. 24 тыс. рублей (далее все суммы указаны в тыс. рублей). Тогда через год её долг увеличится на 10 %, или в 1,1 раза и составит 100 ∙ 1,1 = 110. После выплаты платежа остаток долга составит 110 – 24 = 86. Запишем расчёты по годам:

через 1 год остаток долга составит 110 – 24 = 86;

через 2 года остаток долга составит 86 ∙ 1,1 – 24 = 70,6;

через 3 года остаток долга составит 70,6 ∙ 1,1 – 24 = 53,66;

через 4 года остаток долга составит 53,66 ∙ 1,1 – 24 = 35,026;

через 5 лет остаток долга составит 35,026 ∙ 1,1 – 24 = 14,5286;

Через 6 лет Оля рассчитается с долгом, выплатив меньше 24 тыс. рублей, так как 14,5286 ∙ 1,1 < 24.

Итак, минимальное число лет — 6.

**Ответ.** 6 лет.

**============Задачи для самостоятельного решения ============**

**8.9.** Тимофей хочет взять в кредит 1,1 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней), после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет Тимофей может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 270 тыс. рублей? [2-9]

**8.10.** 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого следующего месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 30-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга.

На какое минимальное количество месяцев возможно взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 137,5 тыс. рублей? [1-26]

**8.11.** 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го января каждого года долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

На какое минимальное количество лет возможно взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тыс. рублей? [1-25]

**======================================================**

***8.3. Найти процентную ставку платежа***

**8.12.** 15 января 2012 года банк выдал кредит на сумму 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

— 1-го января каждого года долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года после начисления процентов.

Кредит был погашен за два года, и при этом в первый год была переведена сумма 600 тыс. рублей, а во второй раз — 550 тыс. рублей. Найдите r. [1-28]

**Решение.** 1-го января каждого года долг возрастает на r %, т. е. в b раз, где b = . После первой выплаты части долга остаток долга составил 1 000 ∙ b – 600 (здесь и далее все суммы указаны в тыс. рублей). После второй выплаты части долга расчёт был закончен, составим уравнение:

(1 000b – 600) ∙ b – 550 = 0.

Это уравнение имеет единственный положительный корень 1,1, следовательно, = 1,1, откуда получим, что r = 10.

**Ответ.** 10.

**8.13.** 15 января планируется взять кредит в банке. Условия его возврата таковы:

— 1-го января каждого года долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;

— выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

Если переводить в банк каждый год по 2 073 600 рублей, то кредит можно выплатить за 4 года. Если по 3 513 600 рублей, то кредит можно выплатить за 2 года. Найдите r. [1-30]

**Решение.** Пусть в кредит взяли a млн рублей (далее все суммы указаны в млн рублей). При начислении процентов остаток долга увеличивается в b раз, где b = . Составим уравнение для расчёта за 2 года:

(ba – 3,5136)b – 3,5136 = 0,

из которого, учитывая, что b ≠ 0, выразим a через b:

a = .

Обозначив c = 2,0736, составим уравнение для расчёта за 4 года:

= 0.

Упростим полученное уравнение:

= 0.

Теперь, подставив вместо a, перепишем полученное уравнение в виде:

= 0,

= 0.

Так как по смыслу задачи , то и полученное уравнение равносильно уравнению:

= 0,

из которого вычислим , учитывая, что с = 2,0736:

= = = .

Так как , то b = 1,2, следовательно, r = 20.

**Ответ.** 20.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**8.14.** 31 декабря 2014 года Олег взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на r %), затем Олег переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 328 050 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 587 050 рублей, то за 2 года. Найдите r. [2-11]

**======================================================**

**8.15.** В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн рублей. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на *r* % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;

— в июле 2017, 2018 и 2019 годов долг остаётся равным 4,2 млн рублей;

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите *r*, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн рублей. [ЕГЭ, 2016]

**Решение.** Пусть ежегодно вклад увеличивается в *b* раз, где *b* = . Так как первые три года остаток долга года остаётся неизменным и равным сумме кредита 4,2 млн рублей, то и платежи в первые три года будут одинаковыми — по *x* млн рублей. Платежи в два последние года будут равными — по *y* млн рублей. Начисление процентов, ежегодные платежи и остатки долга отразим в таблице (в млн рублей).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг на 1.01 | Платёж | Остаток долга |
| 2017 | 4,2*b* | *x* | 4,2 |
| 2018 | 4,2*b* | *x* | 4,2 |
| 2019 | 4,2*b* | *x* | 4,2 |
| 2020 | 4,2*b* | *y* | 4,2*b – y* |
| 2021 | (4,2*b – y*)*b* | *y* | (4,2*b – y*)*b – y* |

Из расчётов 2017 года составим первое уравнение: 4,2*b – x* = 4,2, откуда выразим *x* через *b*:

*x* = 4,2(*b* – 1).

Остаток долга в 2021 году будет равен 0, составим второе уравнение:

(4,2*b – y*)*b* – *y* = 0.

Учитывая, что *b* + 1 ≠ 0, выразим *y* через *b*:

*y* = .

Наконец, сумма всех платежей по кредиту составит 6,1 млн рублей, составим третье уравнение:

3*x* + 2*y* = 6,1. (1)

Подставив в уравнение (1) 4,2(*b* – 1) вместо *x* и вместо *y*, получим уравнение:

12,6(*b* – 1) + = 6,1. (2)

Решив уравнение (2) относительно *b*, получим его единственный положи­тельный корень *b* = 1,1. Из равенства = 1,1 получим: *r* = 10.

**Ответ.** 10.

**9. Кредит с неизвестными платежами**

**9.1.** Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го, 2-го и 3-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 4-го и 5-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн рублей. [МИОО, 2016]

**Решение.** Пусть сумма кредита в начале первого года составляла целое число — *a* млн рублей. Ежегодно вклад увеличивается в 1,2 раза. В конце   
1-го, 2-го и 3-го годов выплатили только проценты: 1,2*a* – *a* = 0,2*a*. В конце   
4-го и 5-го годов были одинаковые выплаты — по *x* млн рублей. Закончим заполнение таблицы.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Год | Долг в начале года | Долг в середине года | Выплата в конце года |
| 1 | *a* | 1,2*a* | 0,2*a* |
| 2 | *a* | 1,2*a* | 0,2*a* |
| 3 | *a* | 1,2*a* | 0,2*a* |
| 4 | *a* | 1,2*a* | *x* |
| 5 | 1,2*a – x* | 1,2(1,2*a – x*) | *x* |

Расчёт по кредиту завершён в конце пятого года, составим уравнение:

1,2(1,2*a* – *x*) = *x*,

единственный корень которого равен *x* = .

Чтобы общая сумма выплат заёмщика превысила 10 млн. рублей, должно выполняться неравенство:

0,6*a* + 2*x* > 10,

0,3*a + x* > 5. (1)

Подставив вместо *x* в неравенство (1), получим:

0,3*a* + > 5,

21*a* > 110. (2)

Число *a* целое, для *a* = 5 неравенство (2) неверно, так как 105 < 110, а для *a* = 6 — верно, так как 126 > 110, следовательно, наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 10 млн. рублей, составляет 6 млн рублей.

**Ответ.** 6 000 000 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**9.2.** Вадим планируется взять льготный кредит на целое число миллионов рублей на пять лет. В середине каждого года действия кредита долг Вадима возрастает на 10 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов Вадим выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го, 4-го и 5-го годов Вадим выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат Вадима не превысит 6 млн рублей. [\*]

**======================================================**

**9.3.** 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5 %), затем Дмитрий переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за 2 года)? [2-17]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* = 4 290 000 рублей (далее все суммы указаны в рублях). Через год 31 декабря 2015 года сумма долга увеличится на 14,5 %, то есть в 1,145 раза. Затем Дмитрий переведёт банку *x* рублей и его долг составит 1,145*a* – *x*. Далее заполняем в таблице второй и третий столбцы: долг на 31 декабря текущего года и остаток долга после платежа:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер года | Долг на 31 декабря | Остаток долга после платежа |
| 0 | *a* |  |
| 1 | 1,145*a* | 1,145*a – x* |
| 2 | 1,145(1,145*a – x*) | 1,145(1,145*a – x*) – *x* |

Так как после второго платежа остаток долга равен нулю, то остаётся решить уравнение, заменив в нём *a* на 4 290 000:

1,145(1,145*a – x*) – *x =* 0.

Оно имеет единственный корень:

x = ,

x = 2622050.

т. е. сумма *x* должна быть равна 2622050 рублей.

**Ответ.** 2622050 рублей.

**9.4.** 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10 %), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами? [ЕГЭ, демоверсия, 2015]

**Решение.** Обозначим: *a* = 9 930 000 (все расчёты в рублях). Пусть в каждом из трёх лет платёж составлял *x* рублей. Тогда остатки долга по годам составили:

1 год — 1,1*a – x*,

2 год — 1,1(1,1*a* – *x*) – *x*,

3 год — 1,1(1,1(1,1*a* – *x*) – *x*) – *x* = 1,331*a* – 3,31*x*.

Так как за три года расчёт по кредиту завершён, то верно равенство:

1,331*a* – 3,31*x* = 0,

из которого получим, что *x* = = 3 993 000.

Итак, сумма ежегодного платежа должна быть равна 3 993 000 рублей.

**Ответ.** 3 993 000 рублей.

**9.5.** В июле планируется взять кредит на сумму 8 052 000 рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* = 8 052 000 рублей (далее все суммы указаны в рублях). В январе сумма долга увеличится на 20 %, то есть в 1,2 раза. Затем переводят банку *x* рублей, за 4 года расчёты по кредиту будут завершены. Составим уравнение:

1,2(1,2(1,2(1,2*a – x*) *– x*) *– x*) *– x* = 0.

Раскрыв скобки в левой части уравнения, выразим *x*:

1,24*a*  *–* 1,23*x –* 1,22*x –* 1,2*x – x* = 0,

2,0736*a* =5,368*x*,

*x* = .

Осталось вычислить значение дроби:

= = 3 110 400.

Итак, чтобы кредит был полностью погашен за 4 года, нужно платить по 3 110 400 рублей.

**Ответ.** 3 110 400 рублей.

**9.6.** 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5 %), затем Алексей переводит в банк *x* рублей. Какой должна быть сумма *x*, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)? [2-18]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* = 6 902 000 рублей (далее все суммы указаны в рублях). Через год сумма долга увеличится на 12,5 %, то есть в 1,125 =  раза. Затем Алексей переведёт банку *x* рублей, к 31 декабря 2015 года его долг составит  – *x*. Далее заполняем в таблице второй и третий столбцы: долг на 31 декабря текущего года и остаток долга после платежа:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Номер года | Долг на 31 декабря | Остаток долга после платежа |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |

Так как после четвёртого платежа остаток долга равен нулю, то остаётся решить уравнение:



заменив в нём *a* на 6 902 000.

Оно имеет единственный корень *x* = 2 296 350, т. е. сумма *x* должна быть равна 2 296 350 рублей.

**Ответ.** 2 296 350 рублей.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**9.7.** 31 декабря Юлия планирует взять в банке кредит под 20 % годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20 %), затем Юлия выплачивает банку треть суммы кредита (последний платёж может быть меньше остальных). За сколько лет она рассчитается с кредитом? [\*]

**======================================================**

**10. Кредиты с равномерным уменьшением долга**

**10.1. Найти сумму кредита (платежа)**

Под равномерным уменьшением долга понимают такую организацию выплат долга по кредиту, при которой остаток долга уменьшается на одну и ту же величину при каждом платеже. Чтобы понять механизм запутанных вычислений, разберём решения простых задач,

**10.1.** 15 января планируют взять в кредит 6 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Определите сумму платежей за три последние месяца. [\*]

**Решение.** Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга 6 млн рублей уменьшается на одну и ту же величину. Так как она уменьшается до нуля за 6 месяцев, то за каждый месяц она уменьшается на 1 (все суммы указаны в млн рублей). Суммы долга на 15-е число записаны во 2-м столбце таблицы.

1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1 %, т. е. в 1,01 раза. (3-й столбец таблицы). Со 2-го по 14-е число каждого месяца надо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки. В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 6,06 до 5, т. е. платёж за 1-й месяц составил 6,06 – 5 = 1,06, за   
2-ой — 5,05 – 4 = 1,05, …, за 6-й — 1,01 – 0 = 1,01 (4-й столбец таблицы).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на 15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | 6 | 6,06 | 0 |
| 1 | 5 | 5,05 | 6,06 – 5 = 1,06 |
| 2 | 4 | 4,04 | 5,05 – 4 = 1,05 |
| 3 | 3 | 3,03 | 1,04 |
| 4 | 2 | 2,02 | 1,03 |
| 5 | 1 | 1,01 | 1,02 |
| 6 | 0 | 0 | 1,01 |

За три последние месяца надо заплатить 1,03 + 1,02 + 1,01 = 3,06.

**Ответ.**  3,06 млн рублей.

**10.2.** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Пусть в июле каждого года сумма первоначального долга 10 млн рублей уменьшается на одну и ту же величину — на 2 млн рублей— пятую часть суммы первоначального долга (далее все суммы указаны в млн рублей). Запишем сумму остатка долга на июль каждого года во 2-й столбец таблицы. Каждый январь остаток долга возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года, т. е. в 1,1 раза (3-й столбец таблицы). Далее надо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки. В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 11 до 8, т. е. платёж за 1-й месяц составил 3, за 2-ой — 2,8, …, за 5-й — 2,2 (4-й столбец таблицы).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг на июль | Долг на январь | Платёж |
| 1 | 10 | 11 | 3 |
| 2 | 8 | 8,8 | 2,8 |
| 3 | 6 | 6,6 | 2,6 |
| 4 | 4 | 4,4 | 2,4 |
| 5 |  | 2,2 | 2,2 |

Общая сумма выплат после погашения кредита составила

3 + 2,8 + 2,6 + 2,4 + 2,2 = 13 млн рублей.

**Ответ.** 13.

**10.3.** Жанна взяла в банке в кредит 1,2 млн рублей на срок 24 месяца. По договору Жанна должна возвращать банку часть денег в конце каждого месяца. Каждый месяц общая сумма долга возрастает на 2%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Жанной банку в конце месяца. Суммы, выплачиваемые Жанной, подбираются так, чтобы сумма долга уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину каждый месяц. Какую сумму Жанна вернёт банку в течение первого года кредитования? [МИОО, 2015]

**Решение.** Пусть в конце каждого месяца сумма долга 1 200 тыс. рублей уменьшается на одну и ту же величину. Так как она уменьшается до нуля за 24 месяцев, то за каждый месяц она уменьшается на 50 (все денежные суммы указаны в тыс. рублей). Суммы долга на конец каждого месяца записаны во 2-м столбце таблицы.

В конце каждого месяца эти суммы увеличиваются на 2 %, т. е. в 1,02 раза. (3-й столбец таблицы). Затем надо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки. В первый месяц надо уменьшить сумму долга с 1224 до 1150, т. е. платёж за 1-й месяц составил 1224 – 1150 = 74, за 2-ой — 1173 –1100 = 73, …, за 12-й — 63 (4-й столбец таблицы).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на конец месяца | Долг на начало месяца | Платёж |
| 0 | 1200 | 1224 | 0 |
| 1 | 1150 | 1173 | 74 |
| 2 | 1100 | 1122 | 73 |
| 3 | 1050 | 1071 | 72 |
| … | … | … | … |
| 11 | 650 | 663 | 64 |
| 12 | 600 | 720 | 63 |

В течение первого года кредитования Жанна вернёт банку

74 + 73 + … + 64 + 63 = 822 тыс. рублей.

**Ответ.** 822 000 рублей.

*Замечание*. Если в таблице много строк и нет желания или времени все их заполнить, то очень важно научиться подмечать закономерность изменения чисел в одном столбце. Например, в каждой строке таблицы из только что решённой задачи сумма номера месяца и платежа постоянна и равна 1 + 74 = 2 + 73 = … = 75. Это наблюдение позволит на экзамене не заполнять все строки в таблице.

Сформулируем задачу, обратную задаче **10.1**.

**10.4.** 15 января планируется взять кредит в банке на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1 го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение трёх последних месяцев кредитования нужно вернуть банку 3,06 млн рублей. Какую сумму взяли в кредит? [\*]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* млн. рублей (далее все суммы указаны в млн. рублей). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину, Она уменьшается до нуля за 6 месяца, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на . Суммы долга на 15-е число записаны в 2-м столбце таблицы. 1-го числа следующего месяца эти суммы увеличиваются на 1 %, то есть в 1,01 раза. (3-й столбец таблицы). Со   
2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 3-го столбца уменьшилась до суммы из 2-го столбца следующей строки (4-й столбец таблицы).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на 15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | *a* | 1,01*a* | 0 |
| 1 |  | = | = |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  | 0 |  |

По условию задачи составим уравнение:

+ + = 3,06

и найдём его единственный корень *a* = 6.

Итак, в кредит взяли 6 млн рублей.

**Ответ.** 6 000 000 рублей.

Мы получили результат, известный из задачи **9.1**.

**10.5.** 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за пятый месяц (со 2 по 14 июня) кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку в течение всего срока кредитования? [1-7]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* рублей (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 9 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на  (заполняем 2-й столбец таблицы). Каждого 1-го числа долг увеличивается на 2 %, или в 1,02раза. Далее аналогично предыдущим решениям, заполним таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на  15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | *a* | 1,02*a* | 0 |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 | 0 | 0 |  |

Так как за пятый месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей, то верно равенство:

= 44 000,

откуда следует, что *a* = 360 000.

Вычислим сумму всех выплат по кредиту при найденном значении *a*:

= 1,1*a* = 396 000.

Следовательно, в течение всего срока кредитования банку нужно выплатить 396 000 рублей.

**Ответ.** 396 000 рублей.

**10.6.** 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года (последних 12 месяцев) кредито­вания нужно вернуть банку 798,75 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года (первых 12 месяцев) кредитования? [1-4]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* рублей (далее все суммы указаны в тыс. рублей). Заполним таблицу, как в предыдущей задаче.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на  15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | *a* | 1,01*a* | 0 |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| … | … | … | *…* |
| 13 |  |  |  |
| … | … | *…* | *…* |
| 22 |  |  |  |
| 23 |  |  |  |
| 24 | 0 | 0 |  |

Пользуясь тем, что в течение второго года кредито­вания нужно вернуть банку 798,75 тыс. рублей, составим уравнение:

+ + … + = 798,75

и найдём его единственный корень *a* = 1500.

Теперь вычислим сумму платежей за первые 12 месяцев при *a* = 1500:

+ + … + = 888,75.

Итак, в первые 12 месяцев предстоит выплатить банку 888,75 тыс. рублей.

**Ответ.** 888 750 рублей.

**10.2. Найти время расчета за кредит**

**10.7.** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** В расчётах за кредитыс уменьшением долга равными частями от платежа к платежу уменьшается не только остаток долга, но и сумма платежа, поэтому чтобы наибольший годовой платёж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей и срок расчёта за кредит был наименьшим, нужно в первый год выплатить наибольшую возможную сумму, т. е. 1,8 млн рублей.

В июле взят кредит на сумму 6 млн рублей (далее все суммы указаны в млн рублей). В январе следующего года долг увеличится на 20 %, или в 1,2 раза, и составит 6 ∙ 1,2 = 7,2. После платежа 1,8 остаток долга составит   
7,2 – 1,8 = 5,4. Далее долг будет ежегодно уменьшаться на 6 – 5,4 = 0,6, следовательно, уменьшится на 6 за 6 : 0,6 = 10 лет.

Итак, кредит следует брать на 10 лет.

**Ответ.** На 10 лет.

**10.8.** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 30 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** *I способ.* Найдём сумму выплат после погашения кредита для срока 5 лет. Кредит взят в сумме 20 млн рублей (далее все суммы указаны в млн рублей), тогда каждый год сумма долга уменьшается на одну и ту же величину 4 (пятая часть первоначального долга). В январе сумма из второго столбца увеличивается на 30 %, или в 1,3 раза (3-й столбец таблицы). С февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга так, чтобы сумма из 2-го столбца уменьшилась до суммы из 1-го столбца следующей строки (4-й столбец таблицы).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг в июле | Долг в январе | Платёж |
| 0 | 20 | 20 ∙ 1,3 | 0 |
| 1 | 16 | 16 ∙ 1,3 | 20 ∙ 1,3 – 16 |
| 2 | 12 | 12 ∙ 1,3 | 16 ∙ 1,3 – 12 |
| 3 | 8 | 8 ∙ 1,3 | 12 ∙ 1,3 – 8 |
| 4 | 4 | 4 ∙ 1,3 | 8 ∙ 1,3 – 4 |
| 5 | 0 | 0 | 4 ∙ 1,3 – 0 |

Общую сумму выплат получим, сложив платежи по годам:

1,3 ∙ (20 + 16 + 12 + 8 + 4) – (16 + 12 + 8 + 4 + 0) = 38.

Полученный результат меньше 47, значит, надо увеличить число лет. Ближайшее число лет, для которого доли первоначального долга выражаются десятичной дробью — это 8. Проведём аналогичные расчёты без комментариев.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг в июле | Долг в январе | Платёж |
| 0 | 20 | 20 ∙ 1,3 | 0 |
| 1 | 17,5 | 17,5 ∙ 1,3 | 20 ∙ 1,3 – 17,5 |
| 2 | 15 | 15 ∙ 1,3 | 17,5 ∙ 1,3 – 15 |
| 3 | 12,5 | 12,5 ∙ 1,3 | 15 ∙ 1,3 – 12,5 |
| 4 | 10 | 10 ∙ 1,3 | 12,5 ∙ 1,3 – 10 |
| 5 | 7,5 | 7,5 ∙ 1,3 | 10 ∙ 1,3 – 7,5 |
| 6 | 5 | 5 ∙ 1,3 | 7,5 ∙ 1,3 – 5 |
| 7 | 2,5 | 2,5 ∙ 1,3 | 5 ∙ 1,3 – 2,5 |
| 8 | 0 | 0 | 2,5 ∙ 1,3 – 0 |

Общую сумму платежа получим, сложив платежи по годам (в скобках по 8 слагаемых):

1,3 ∙ (20 + 17,5 + … + 5 + 2,5) – (17,5 + 15 + … + 2,5 + 0) = 47.

Полученный результат равен 47, а при увеличении числа лет сумма будет больше 47, следовательно, получен ответ на вопрос задачи.

*II способ.* Чтобы не заниматься подбором числа лет, будем считать, что условия задачи будут выполнены за *x* лет. Проведём аналогичные расчёты. В июле долг уменьшается на по сравнению с июлем предыдущего года, в январе увеличивается в 1,3 раза.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг в июле | Долг в январе | Платёж |
| 0 | 20 | 26 |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| … | … | … | … |
| *a –* 1 |  |  |  |
| *a* | 0 | 0 |  |

По условию задачи составим уравнение:

= 47,

= 47,

13(*a* + 1) – 10(*a* – 1) = 47

и найдём его единственный корень *a* = 8.

**Ответ.** 8.

*Замечание.* Здесь трудно советовать, какой способ решения выбрать, если похожая задача попадется на экзамене. Но брать деньги в долг, чтобы через восемь лет возвращать сумму в 2,35 раза большую, можно только при полной уверенности, что вы не попадёте в долговую яму.

**10.9.**  В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей? [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Будем считать, что условия задачи будут выполнены за *x* лет. В июле долг уменьшается на по сравнению с июлем предыдущего года, в январе увеличивается в 1,25 = раза. Далее решение аналогично второму способу решения предыдущей задачи.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг в июле | Долг в январе | Платёж |
| 0 | 16 | 20 |  |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| … | … | … | … |
| *x –* 1 |  |  |  |
| *x* | 0 | 0 |  |

По условию задачи составим уравнение:

= 40,

= 40,

10(*x* + 1) – 8(*x* – 1) = 40

и найдём его единственный корень *x* = 11.

Итак,кредит взят на 11 лет.

**Ответ.** 11.

***10.3. Найти процентную ставку* за кредит (платеж)**

**10.10.** 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить за весь срок кредитования? [2-13]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* рублей (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 5 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на . Далее заполним таблицу аналогично предыдущим реше­ниям.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на  15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | *a* | 1,01*a* | 0 |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  | 0 |  |

Общая сумма денег, выплаченных банку равна:

+ + + + = 1,03*a*,

что составляет 103 % от суммы кредита. Тогда за весь срок кредитования нужно выплатить банку 103 % от суммы кредита.

*Замечание.* Ответ к этой задаче в сборнике [2] дан с ошибкой: 3 %. Он является ответом на совсем другой вопрос: На сколько процентов сумма платежей больше суммы кредита?

**10.11.** 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите *r*. [2-29]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* рублей (далее все суммы указаны в рублях). Пусть каждый месяц 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 9 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на (заполняем 2-й столбец таблицы). Каждого 1-го числа долг увеличивается на *r* %, или в *b* раз, где *b* = . Далее аналогично предыдущим решениям, заполним таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на  15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | *a* | *ab* | 0 |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 | 0 | 0 |  |

Общая сумма, выплаченная банку равна:

+ + … + + =

= = (5*b* – 4)*a*,

что составляет 100 % + 15 % = 115 % от суммы кредита, т. е. 1,15*a*.

Решив уравнение

(5*b* – 4)*a* = 1,15*a*

относительно *b* (*a* ≠ 0), получим, что *b* = 1,03, тогда *r* = 3.

**Ответ.** 3.

**10.12.** 15 января планируется взять кредит в банке на 12 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 13 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r.[1-10]

**Решение.** Пусть кредит взят в сумме *a* рублей (далее все суммы указаны в рублях). Пусть 15-го числа сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 12 месяцев, следовательно, за каждый месяц она уменьшается на (заполняем 2-й столбец таблицы). Каждого 1-го числа долг увеличивается на *r* %, или в *b* раз, где *b* = . Далее аналогично предыдущим решениям, заполним таблицу.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на  15-е число | Долг на 1-е число | Платёж |
| 0 | *a* | *ab* | 0 |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| … | … | … | … |
| 10 |  |  |  |
| 11 |  |  |  |
| 12 | 0 | 0 |  |

Общая сумма, выплаченная банку равна:

+ + … + + =

= = (6,5*b* – 5,5)*a*,

что составляет 100 % + 13 % = 113 % от суммы кредита, т. е. 1,13*a*.

Решив уравнение

(6,5*b* – 5,5)*a* = 1,13*a*

относительно *b* (*a* ≠ 0), получим, что *b* = 1,02, тогда *r* = 2.

**Ответ.** 2.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**10.13.** 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит. Найдите *r*. [ЕГЭ, 2015]

======================================================

**10.14.** В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на *r*% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти *r*, если известно, что наибольший годовой платёж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей. [ЕГЭ, 2015]

**Решение.** Кредит взят в сумме 6 млн рублей (далее все суммы указаны в млн рублей). Пусть каждый год в июле сумма долга уменьшается на одну и ту же величину. Она уменьшается до нуля за 15 лет, следовательно, за каждый год она уменьшается на = 0,4 (заполняем 2-й столбец таблицы). В январе следующего года долг увеличивается на *r* %, или в *b* раз, где *b* = (заполняем 3-й столбец таблицы). Первый платёж равен 6*b* – 5,6 (самый большой), последний платёж равен 0,4*b* (самый маленький), так как в 4-м столбце таблицы платежи из года в год уменьшаются на 0,4*b* – 0,4 > 0.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг в июле | Долг в январе | Платёж |
| 0 | 6 | 6*b* | 0 |
| 1 | 5,6 | 5,6*b* | 6*b* – 5,6 |
| 2 | 5,2 | 5,2*b* | 5,6*b* – 5,2 |
| … | … | … | *…* |
| 13 | 0,8 | 0,8*b* | 1,2*b* – 0,8 |
| 14 | 0,4 | 0,4*b* | 0,8*b* – 0,4 |
| 15 | 0 | 0 | 0,4*b* ­– 0 |

По условию задачи 6*b* – 5,6 ≤ 1,9 и 0,4*b* ≥ 0,5.

Решив систему неравенств

получим: *b* = 1,25. Так как как *b* = то *r* = 25.

**Ответ.** 25.

**============Задачи для самостоятельного решения ============**

**10.15.** 15 января планируется взять кредит в банке на 25 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r* % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 39 % больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите *r*. [2-10]

**10.16.** 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за первые 12 месяцев нужно выплатить банку 177,75 тыс. рублей. Какую сумму планируют взять в кредит? [2-25]

===================================================

**11. Кредиты с неравномерным уменьшением долга**

**11.1.** 15-го ян­ва­ря был выдан по­лу­го­до­вой кредит на раз­ви­тие бизнеса. В таб­ли­це представлен гра­фик его погашения.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| Долг (в процентах от кредита) | 100% | 90% | 80% | 70% | 60% | 50% | 0% |

 В конце каж­до­го месяца, на­чи­ная с января, те­ку­щий долг уве­ли­чи­вал­ся на 5%, а вы­пла­ты по по­га­ше­нию кредита про­ис­хо­ди­ли в пер­вой половине каж­до­го месяца, на­чи­ная с февраля. На сколь­ко процентов общая сумма вы­плат при таких усло­ви­ях больше суммы са­мо­го кредита? [ЕГЭ, 2016]

**Решение.** Пусть взяли в кредит *a* рублей (все суммы в рублях). По условиям задачи заполним в таблице суммы долга на 15-е число каждого месяца (второй столбец таблицы), увеличим на 5 % полученные суммы (третий столбец таблицы). Вычислим платежи каждого месяца, вычитая из числа в   
3-м столбце таблицы число во 2-м столбце таблицы строкой ниже*.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на 15-е число | Долг в конце месяца | Платёж |
| 0 | *a* | 1,05*a* | 0 |
| 1 | 0,9*a* | 0,945*a* | 1,05*a* – 0,9*a* = 0,15*a* |
| 2 | 0,*8a* | 0,84*a* | 0,945*a* – 0,8*a* = 0,145*a* |
| 3 | 0,7*a* | 0,735*a* | 0,84*a* – 0,7*a* = 0,14*a* |
| 4 | 0,6*a* | 0,63*a* | 0,735*a* – 0,6*a* = 0,135*a* |
| 5 | 0,5*a* | 0,525*a* | 0,63*a* – 0,5*a* = 0,13*a* |
| 6 | 0 | 0 | 0,525*a* |

Сложив все платежи, получим:

0,15*a* + 0,145*a* + 0,14*a* + 0,135*a* + 0,13*a* + 0,525*a* = 1,225*a*.

Общая сумма вы­плат больше суммы са­мо­го кредита на 0,225*a*, или на 22,5 %.

**Ответ.** 22,5.

**11.2.** 15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число *r* процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

− 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
| Долг (в млн рублей) | 1 | 0,6 | 0,4 | 0,3 | 0,2 | 0,1 | 0 |

 Найдите наибольшее значение *r*, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн рублей. [ЕГЭ, 2016]

**Решение.** Пусть *b* = 1 + . По условиям задачи заполним второй столбец таблицы — суммы долга на 15-е число каждого месяца (в млн рублей). Увеличим на *r* %, или в *b* раз, полученные суммы (третий столбец таблицы). Вычислим платежи каждого месяца, вычитая из числа в 3-м столбце таблицы число во 2-м столбце таблицы строкой ниже*.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяцев прошло | Долг на 15-е число | Долг в конце месяца | Платёж |
| 0 | 1 | *b* | 0 |
| 1 | 0,6 | 0,6*b* | *b –* 0,6 |
| 2 | 0,4 | 0,4*b* | 0,6*b –* 0,4 |
| 3 | 0,3 | 0,3*b* | 0,4*b –* 0,3 |
| 4 | 0,2 | 0,2*b* | 0,2*b –* 0,2 |
| 5 | 0,1 | 0,1*b* | 0,2*b –* 0,1 |
| 6 | 0 | 0 | 0,1*b* |

Сложив все платежи, получим: 2,6*b* –1,6.

Так как общая сумма выплат должна быть меньше 1,2 млн рублей, то из неравенства 2,6*b* –1,6 < 1,2 получим: *b* = 1 + < 1 + . Наибольшее значение *r*, при котором это условие выполняется, равно 7.

**Ответ.** 7.

**11.3.** В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере *a* млн рублей, где *a* — **целое** число. Условия его возврата таковы:

− каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 |
| Долг (в млн рублей) | *a* | 0,7*a* | 0,4*a* | 0 |

 Найдите наименьшее **целое** *a*, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей. [ЕГЭ, 2016]

**Решение.** По условиям задачи заполним второй столбец таблицы — суммы долга на июль каждого года (в млн рублей). Увеличим на 25 % полученные суммы (третий столбец таблицы). Вычислим платежи каждого месяца, вычитая из числа в 3-м столбце таблицы число во 2-м столбце таблицы строкой ниже*.*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Лет прошло | Долг в июле | Долг в январе | Платёж |
| 0 | *a* | 1,25*a* | 0 |
| 1 | 0,7*a* | 0,875*a* | 1,25*a* – 0,7*a* = 0,55*a* |
| 2 | 0,4*a* | 0,5*a* | 0,875*a –* 0,4*a* = 0,475*a* |
| 3 | 0 | 0 | 0,5*a* |

Каждая из выплат будет больше 5 млн рублей, если выполнены неравенствj 0,475*a* > 5. Наименьшее общее решение этих неравенств *a* = 11.

**Ответ.** 11.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**11.4.** В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере *a* млн рублей, где *a* — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Месяц и год | Июль 2016 | Июль 2017 | Июль 2018 | Июль 2019 | Июль 2020 |
| Долг (в млн рублей) | *a* | 0,8*a* | 0,5*a* | 0,1*a* | 0 |

Найдите наибольшее значение *a*, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей. [ЕГЭ, 2016]

========================================================

**11.5.** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

− каждый январь долг увеличивается на *r*% по сравнению с концом предыдущего года;

− с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рублей, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рублей, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите *r*.

**Решение.** Пусть *b* = 1 + и взяли в кредит *a* рублей (все суммы в рублях). Для краткости записи решения обозначим *x* = 58 564, *y* = 106 964.

Так как при ежегодной выплате *x* рублей остаток долга равен нулю, то верно равенство:

= 0. (1)

Так как при ежегодной выплате *y* рублей остаток долга равен нулю, то верно равенство:

= 0. (2)

Выразив из равенств (1) и (2) число *a*, и приравняв полученные резуль­таты, получим уравнение относительно *b*. Выполним равносильные преобра­зования полученного уравнения, учитывая, что *b* > 1 и =   
= :

=

= ,

= ,

= ,

= ,

откуда получим, что = = = .

Так как *b* > 0, то *b* = 1,1. Следовательно, *r* = 10.

**Ответ.** 10.

**12. Шахты, комбинаты, области…**

Начнём с задачи про шахты. Ситуация, описанная в ней, весьма условна, так как ни в одной шахте мира не добывают алюминий и никель в чистом виде, да ещё в одной шахте! Будем считать, что для упрощения описания сюжета авторы задачи никелевую руду и алюминиевую руду называют для краткости «никель» и «алюминий», а расчёты ведут с массой металла, содержащегося в руде каждого вида.

**12.1.** В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод? [2-1]

**Решение.** *I способ.* Пусть на первой шахте *x* рабочих добывают алюминий и (100 – *x*) рабочих добывают никель. В день они добывают 5*x* кг алюминия и 15(100 – *x*) = 1500 – 15*x* кг никеля.

Пусть на второй шахте *y* рабочих добывают алюминий и (300 – *y*) рабочих добывают никель. В день они добывают 15*y* кг алюминия и 5(300 – *y*) =   
= 1500 – 5*y* кг никеля.

Для сплавления металлов алюминия берут в 2 раза больше, чем никеля. Составим уравнение:

5*x* + 15*y* = 2(1500 – 15*x* + 1500 – 5*y*),

откуда получим, что

*y* = 240 – 1,4*x*. (1)

Весь металл идёт в переплавку, масса *m* полученного сплава равна

*m* = 5*x* + 15*y* + 3000 – 15*x* – 5*y*,

*m* = 3000 + 10*y –* 10*x*. (2)

Подставим в равенство (2) вместо y выражение 240 – 1,4*x*, получим:

*m* = 5400 *–* 14*x*.

Наибольшая масса сплава получится при *x* = 0, она равна 5 400 кг.

*II способ.* Поищем решение попроще. Очевидно, что на первой шахте выгоднее добывать никель, в день 100 рабочих там могут добыть 1500 кг никеля*.* А 300 рабочих на второй шахте могли бы добыть 4500 кг алюминия, но столько не требуется, алюминия должно быть в 2 раза больше, чем никеля, а не в 3. Пусть на второй шахте *n* рабочих добывают никель и (300 – *n*) рабочих добывают алюминий. В день они добывают 5*n* кг никеля и 15(300 – *n*) =   
= 4500 – 15*n* кг алюминия.

Для сплавления металлов алюминия берут в 2 раза больше, чем никеля. Составим уравнение:

4500 – 15*n* = 2(1500 + 5*n*),

имеющее единственный корень *n* = 60.

Весь металл идёт в переплавку, масса *m* полученного сплава равна

*m* = 4500 – 15*n* + 1500 + 5*n* = 6000 – 10*n* = 6000 – 600 = 5400.

Наибольшая масса сплава равна 5 400 кг.

**Ответ.** 5 400 кг.

**12.2.** На каждом из двух комбинатов изготавливают детали *A* и *B*. На первом комбинате работают 60 человек, и один рабочий изготавливает за смену 10 деталей *A* или 15 деталей *B*. На втором комбинате работают 260 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей *A* или 10 деталей *B*. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны две детали *A* и 1 деталь *B*. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену? [2-1]

**Решение.** *I способ.* Пусть на первом комбинате *x* рабочих изготавливают детали *A* и (60 – *x*) рабочих изготавливают детали *B*. За смену изготавливают 10*x* деталей *A* и 15(60 – *x*) = 900 – 15*x* деталей *B*.

Пусть на втором комбинате *y* рабочих изготавливают детали *A* и (260 – *y*) рабочих изготавливают детали *B*. За смену изготавливают 15*y* деталей *A* и 10(260 – *y*) = 2600 – 10*y* деталей *B*.

Для сборки изделий берут в 2 раза больше деталей *A*, чем деталей *B*. Составим уравнение:

10*x* + 15*y* = 2(900 – 15*x* + 2600 – 10*y*),

откуда получим, что

*y* = 200 – *x*. (1)

Так как число изделий *i* равно числу деталей *B*, то

*i* = 3500 *–* 15*x* – 10*y*. (2)

Подставим в равенство (2) вместо y выражение 200 – *x*, получим:

*i* = 1500 *–* 3*x*.

Наибольшее число изделий получится при *x* = 0, оно равно 1500.

*II способ.* На первом комбинате выгоднее изготавливать детали *B*. 60 рабочих за смену изготовят 900 деталей *B*. Если бы на втором комбинате все рабочие изготавливали детали *A*, то за смену они изготовили бы 260 ∙ 15 = 3900 деталей *A*, т. е. в 4больше, чем деталей *B*, а требуется в 2 раза больше.

Пусть на втором комбинате *n* рабочих изготавливают детали *B* и (260 – *n*) рабочих изготавливают детали *A*. За смену они изготавливают 10*n* деталей *B* и 15(260 – *n*) = 3900 – 15*n* деталей *A*.

Для сборки изделий берут в 2 раза больше деталей *A*, чем деталей *B*. Составим уравнение:

3900 – 15*n* = 2(900 + 10*n*),

имеющее единственный корень *n* = 60.

Так как число изделий *i* равно числу деталей *B*, то

*i* = 900 + 10*n =* 900 + 600 = 1500.

Наибольшее число изделий равно 1500.

**Ответ.** 1500.

**12.3.** На каждом из двух комбинатов изготавливают детали *A* и *B*. На первом комбинате работают 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей *A* или 15 деталей *B*. На втором комбинате работают 100 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей *A* или 5 деталей *B*. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны две детали *A* и 1 деталь *B*. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену? [1-20]

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**12.4.** На каждом из двух комбинатов изготавливают детали *A* и *B*. На первом комбинате работают 40 человек, и один рабочий изготавливает за смену 15 деталей *A* или 5 деталей *B*. На втором комбинате работают 160 человек, и один рабочий изготавливает за смену 5 деталей *A* или 15 деталей *B*. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны 2 детали *A* и 1 деталь *B*. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену? [1-19]

======================================================

Условия следующей задачи чуть сложнее, а её решение потребовало применения производной.

**12.5.** В каждом из двух комбинатов работает по 1000 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 3 детали *A* или 1 деталь *B*. На втором комбинате для изготовления 10*t* деталей (и *A*, и *B*) требуется *t*2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны 1 деталь *A* и 3 детали *B*. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену? [1-15]

**Решение.** Пусть на первом комбинате *y* рабочих изготавливают детали *A* и (1000 – *y*) рабочих изготавливают детали *B*. За смену изготавливают 3*y* деталей *A* и (1000 – *y*) деталей *B*.

Пусть на втором комбинате *x* рабочих изготавливают детали *A* и   
(1000 – *x*) рабочих изготавливают детали *B*. Потратив *y* человеко-смен на изготовление деталей *A*, получат 10 деталей *A*. Потратив 1000 – *x* человеко-смен на изготовление деталей *B*, получат 10 деталей *B*. Деталей *B* должно быть в 3 раза больше, чем деталей *A*, составим уравнение:

3(3*y* + 10) = 1000 – *y* + 10,

откуда получим, что

*y* = 100 +.

Так как число изделий *i* равно числу деталей *A*, то это число равно:

*i* = 3*y* + 10,

откуда, подставив выражение 100 + вместо *y*, получим, что

*i* = 300 + . (1)

Рассмотрим непрерывную функцию *i*(*x*), заданную формулой (1) на отрезке [0; 10] и дающую целые значения величины i для некоторых целых значений x из указанного отрезка.

Производная функции *i*(*x*) равна *i'*(*x*) = . На указан­ном отрезке функция *i*(*x*) имеет единственную критическую точку *x*0 = 100. Эта точка является точкой максимума, так как для *x* < 100 производная *i'*(*x*) положительна, а для *x* > 100 — отрицательна. Так как *i*(100) = 400, то наибольшее число изделий равно 400.

**Ответ.** 400.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**12.6.** В каждом из двух комбинатов работает по 200 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 2 детали *A* или 2 детали *B*. На втором комбинате для изготовления 10*t* (и *A*, и *B*) требуется *t*2 человеко-смен. Оба комбината поставляют детали на завод, где из деталей собирают изделие, для изготовления которого нужны 1 деталь *A* и 1 деталь *B*. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее число изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать завод за смену? [1-16]

Условия следующей задачи ещё сложнее.

**12.7.** В двух областях есть по 50 рабочих, каждый из которых готов трудиться 10 часов в сутки на добыче алюминия и никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,2 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи *x* кг алюминия в день требуется *x*2 человеко-часов труда, а для добычи *y* кг никеля в день требуется *y*2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 2 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод? [2-7]

**Решение.** *I способ.* Пусть в первой области *y* рабочих добывают алюминий и (50 – *y*) рабочих добывают никель. В день они добывают 2*y* кг алюминия и (50 – *y*) кг никеля.

Пусть во второй области за сутки добывают *x* кг алюминия, затрачивая *x*2 человеко-часов труда. Тогда алюминий добывают 0,1*x*2 рабочих, а никель добывают (50 – 0,1*x*2) рабочих, затрачивая (500 – *x*2) человеко-часов труда и добывая кг никеля.

Для сплавления никеля берут в 2 раза больше, чем алюминия. Составим уравнение:

50 – *y* + = 2(2*y* + *x*),

откуда получим, что

*y* = .

Теперь вычислим массу *m* полученного сплава:

*m* = 50 – *y* + + 2*y* + *x* = 50 + + *y* + *x*,

откуда, подставив выражение вместо *y*, получим, что

*m* = .

Рассмотрим непрерывную функцию

*m*(*x*) = ,

определённую на отрезке [0; 10] и дающую значения величины m для целых значений x из указанного отрезка.

Производная функции *m*(*x*) равна *m'*(*x*) = . На указан­ном отрезке функция *m*(*x*) имеет единственную критическую точку *x*0 = 10. Эта точка является точкой максимума, так как для *x* < 10 производная *m'*(*x*) положительна, а для *x* > 10 — отрицательна. Так как *m*(10) = 90, то наибольшая масса сплава равна 90 кг.

Применим другие обозначения для второго комбината.

*II способ.* Пусть по-прежнему в первой области *y* рабочих добывают алюминий и (50 – *y*) рабочих добывают никель. В день они добывают 2*y* кг алюминия и (50 – *y*) кг никеля.

Пусть *r* рабочих во второй области добывают алюминий. Затрачивая в сутки 10*r* человеко-часов труда, они добывают  кг алюминия. Оставшиеся (50 – *r*) рабочих добывают никель. Затрачивая в сутки 10(50 – *r*) =   
= 500 – 10*r* человеко-часов труда, они добывают  кг никеля.

Для сплавления никеля берут в 2 раза больше, чем алюминия. Составим уравнение:

2(2*y* + ) = 50 – *y* +

из которого получим, что *y* = 10 + 0,2

Теперь вычислим массу *m* полученного сплава:

*m* = 2*y* + + 50 – *y* + = *y* + 50 + + ,

откуда, подставив выражение 10 + 0,2 вместо *y*, получим, что

*m* = 60 + + .

Рассмотрим непрерывную функцию

*m*(*r*) = 0,6,

определённую на отрезке [0; 50] и дающую значения величины m для целых значений x из указанного отрезка.

Производная функции *m*(*r*) равна *m'*(*r*) = . На указан­ном отрезке функция *m*(*r*) имеет единственную критическую точку *r*0 = 10. Эта точка является точкой максимума, так как для *r* < 10 производная *m'*(*r*) положительна, а для *r* > 10 — отрицательна. Так как *m*(10) = 90, то наибольшая масса сплава равна 90 кг.

**Ответ.** 90 кг.

Надо признать, что оба решения получились уж очень «взрослые», требуют применения производной. Коллега Ю.О. Пукас нашёл возможность упростить первое решение.

Если массу добытого алюминия обозначить 2*y* + *x* = *a* (*a* = ), то, подставив в равенство

50 – *y* + = 2(2*y* + *x*)

*a* вместо 2*y* + *x* и вместо *y*, перепишем его в виде:

2 = 5*a* – *x* – 100.

Возведя это равенство в квадрат, после упрощения получим квадратное уравнение относительно *x*:

*x*2 – 2(*a* – 20)*x* – 200*a* + 1600 = 0.

Чтобы наша задача имела решение, это уравнение должно иметь неотрицательный дискриминант:

(*a* – 20)2– 5*a*2 + 200*a* – 1600 ≥ 0,

что даёт нам границы для *a*:

10 ≤ *a* ≤ 30.

Масса сплава будет наибольшей, если, с сохранением отношения масс металлов, масса алюминия (*a*) будет наибольшей. При наибольшем значении *a* = 30 из этого промежутка квадратное уравнение имеет единственный корень *x* = 10. При этом получается наибольшее значение *m* = 90.

Таким образом, нашлось решение задачи без производной.

**============Задача для самостоятельного решения ============**

**12.8.** В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 10 часов в сутки на добыче алюминия и никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи *x* кг алюминия в день требуется *x*2 человеко-часов труда, а для добычи *y* кг никеля в день требуется *y*2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод? [2-43]

======================================================

Для разнообразия рассмотрим задачу из ЕГЭ-2015, в ней требовалось найти наименьшее значение величины.

**12.9.** Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно *t*2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 2*t* единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно *t*2 часов в неделю, то за эту неделю они производят 5*t* единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

**Решение.** Пусть на заводе в первом городе рабочие трудятся суммарно *t*2 часов в неделю и производят 2*t* единиц товара, а на заводе во втором городе рабочие трудятся суммарно *x*2 часов в неделю и производят 5*x* единиц товара. Тогда верно равенство

2*t* + 5*x* = 580,

откуда 2*t* = 580 – 5*x*.

Сумма, расходуемая на оплату труда равна

500(*t*2 + *x*2) = 125(4*t*2 + 4*x*2) = 125((580 – 5*x*)2 + 4*x*2) =   
= 125*∙*29*∙*(*x*2 – 200x + 11600).

Эта сумма будет наименьшей, если квадратичная функция

*y* = *x*2 – 200x + 11600

принимает наименьшее значение, т. е. в точке *x* = 100 (абсцисса вершины параболы).

Итак, наименьшая сумма равна

125*∙*29*∙*(1002 – 200∙100 + 11600) = 5 800 000 рублей.

**Ответ.** 5 800 000 рублей.

**13. Шоколадные батончики**

Рассмотрим ещё две задачи на нахождение наибольшего значения величины с применением совсем другой идеи.

**13.1.** Цех кондитерской фабрики производит шоколадные батончики двух сортов массой 50 г в коробках по 24 батончика: «Шоколадный» (50 % шоколада и 25 % орехов) и «Ореховый» (40 % шоколада и 50 % орехов). Цех получает прибыль от реализации коробки батончиков сортов «Шоколадный» и «Ореховый» в сумме 240 рублей и 300 рублей соответственно. Какую наибольшую прибыль (в рублях) может получить цех, если за смену он может израсходовать не более 108 кг шоколада и 90 кг орехов? [\*]

**Решение.** Масса батончиков в одной коробке составляет 50∙24 = 1 200 (г). Коробка сорта «Шоколадный» содержит 600 г шоколада и 300 г орехов, а коробка сорта «Ореховый» содержит 480 г шоколада и 600 г орехов.

Пусть цех произвел x коробок батончиков сорта «Шоколадный» и y коробок батончиков сорта «Ореховый», тогда цех израсходовал 600x + 480y (г) шоколада и 300x + 600y (г) орехов, а прибыль от реализации произведённой продук­ции составит P = 240x + 300y (р.).

Наибольшая прибыль получится в том случае, если будет произведено целое количество коробок каждого сорта и будет израсходован весь имеющийся запас шоколада и орехов.

Решим систему уравнений 600x + 480y = 108000 и 300x + 600y = 90000.

Эта система имеет единственное решение: x = 100 и y = 100. Увеличить количество коробок нельзя, так как весь шоколад и все орехи уже израсходованы. Наибольшая прибыль от реализации произведённой продукции составит P = 240x + 300y = 54000 (р.).

**Ответ.** 54000.

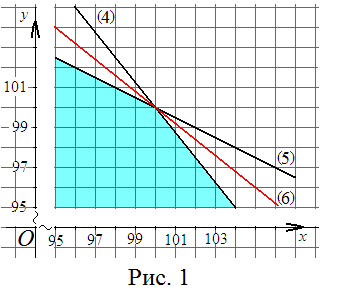
Замечание. Рассмотрим графическую иллюстрацию приведённого выше решения. По условию задачи должны выполняться неравенства

600*x* + 480*y*  108000 и 300*x* + 600*y*  90000,

которые перепишем в виде:

*y*  225 – *x* и *y*  150 – *x*.

Любая пара натуральных чисел (x; y), удовлетворяющая этим неравенствам изображается точкой (x; y) координатной плоскости, лежащей **не выше** каждой из прямых:

 *y* = 225 – *x*, (1)

*y* = 150 – *x*, (2)

т. е. точкой закрашенной области на рисунке 1.

Прямые (1) и (2) пересекаются в точке (100; 100).

Из равенства P = 240x + 300y выразим y через P и x:

*y* = . (3)

Меняя значения P, получим семейство параллельных прямых. Одна из этих прямых — при P = 54000 — проходит через точку (100; 100) пересечения прямых (1) и (2).

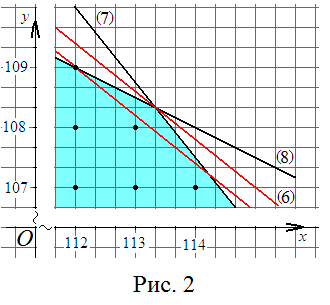
Прямые рассматриваемого семейства параллельных прямых, проходящие через точки (x; y), закрашенной области, проходят ниже прямой (6), так как все эти точки расположены ниже прямой (6). Этим прямым соответствуют значения P < 54000.

**13.2.** Другой раз тот же цех кондитерской фабрики должен был произвести шоколадные батончики двух сортов при тех же условиях. Какую наибольшую прибыль (в рублях) может получить цех, если на смену он получает не более 120 кг шоколада и 99 кг орехов? [\*]

**Решение.** Рассуждая, как при решении предыдущей задачи, получим неравенства

600*x* + 480*y*  120000 и 300*x* + 600*y*  99000,

которые перепишем в виде: *y*  250 – *x* и *y*  165 – *x*.

Любая пара натуральных чисел (x; y), удовлетворяющая этим неравенствам изобра­жается точкой (x; y) координатной плоскости, лежащей **не выше** каждой из прямых:

*y* = 250 – *x*, (1)

*y* = 165 – *x*, (2)

Эти точки с целыми координатами принадлежат закрашенной области (рис. 2).

Прямые (1) и (2) пересекаются в точке (113; 108).

Из равенства P = 240x + 300y выразим y через p и x, получим равенство:

*y* = . (3)

Меняя значения P, получим семейство параллельных прямых. Одна из этих прямых — при P = 54000 — на рисунке 2 проходит через точку пересечения прямых (7) и (8), но координаты этой точки пересечения — дробные числа.

Найдём наибольшее значение P, при котором прямая, задаваемая уравнением y = , проходит через точку с целыми координатами (на рисунке 2 эти точки выделены). Эта точка имеет координаты (112; 109). Найдём значение P, соответствующее значениям x = 112 и y = 109:

*P* = 240*x* + 300*y* = 240 ⋅ 112 + 300 ⋅ 109 = 59580 (р.).

Значение P = 59580 является наибольшим, так как точки с целыми координатами из закрашенной области лежат ниже прямой y =  – x.

**Ответ.** 59580.

**Ответы**

**1.3.** 27 000 000 рублей. **2.2.** 104 500 рублей. **2.3.** 63 000 рублей. **3.3.** 2005. **4.2.** На . **4.5.** а) 60 км; б) на 20 %. **4.8.** На 45 %. **4.10.** На 100 %. **4.12.** На 10 %. **4.13.** 26 %. **5.5.** Если p = 80, то x = 68, y = 63. **5.7.** На 508 200 рублей. **6.2.** 4 и 8 млн рублей. **6.4.** 99 млн рублей. **7.4.** 9. **7.6.** На 50 %. **8.4.** 6330000 рублей. **8.6.** 5 000 000 рублей. **8.9.** 6 лет. **8.10.** 9 месяцев. **8.11.** 5 лет. **8.14.** 12,5. **9.2.** 4 000 000 рублей. **9.7.** За 6 лет. **10.13.** 1. **10.15.** 3. **10.16.** 300 000 рублей. **11.4.** 36. **12.3.** 660. **12.4.** 600. **12.6.** 300. **12.8.** 240.

**Литература**

**1. ЕГЭ-2017** : Математика : 30 тренировочных вариантов экзамена­ционных работ для подготовки к единому государственному экзамену : профильный уровень / под. ред. И.В. Ященко. М.: АСТ, 2017. – 135 с.

**2. ЕГЭ-2017** : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под. ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.

**3.** Подготовка к олимпиадам и ЕГЭ по математике и физике. Сайт И.В. Яковлева. <http://mathus.ru/math/ege19.pdf>

**Оглавление**

Предисловие 1

1. Наибольший доход фермера, или Метод Удодова-старшего 2

2. Наибольший доход владельца отеля 3

3. Наибольший доход от продажи ценных бумаг 4

4. На сколько процентов больше или меньше? 6

5. Оценка выгодности условий 10

6. Проекты с дополнительным вложением средств 16

7. Прибыль и квадратичная функция 18

8. Кредиты с известными платежами

8.1. Найти сумму кредита (вклада) 21

8.2. Найти время расчёта за кредит 23

8.3. Найти процентную ставку платежа 25

9. Кредит с неизвестными платежами 27

10. Кредиты с равномерным уменьшением долга

10.1. Найти сумму кредита (платежа) 31

10.2. Найти время расчета за кредит 37

10.3. Найти процентную ставку за кредит (платеж) 40

11. Кредиты с неравномерным уменьшением долга 45

12. Шахты, комбинаты, области… 49

13. Шоколадные батончики 56

Ответы 58

Литература 59