**Как не получить ответ в задаче, не имеющей решения?**

А.В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru
[www.shevkin.ru](http://www.shevkin.ru)

История, связанная с рассмотренными ниже задачами, такова. Автор этих строк с ошибкой вспомнил задачу **3**, когда готовился читать лекцию учителям математики. Получилась задача **5**, в которой двумя способами был получен «ответ»: за 3 ч. А после лекции была выполнена проверка, показавшая, что в задаче **5** описана невозможная ситуация.

Аналогичный конфуз произошёл в США, где школьники в одном из тестов вычисляли площадь несуществующего прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 и высотой 6, опущенной на гипотенузу. Показалось интересным обсудить проблему получения ответа в задаче, не имеющей решения в силу невозможности ситуации, описанной в этой задаче. Начнём с более простых задач и рассмотрим различные способы их решения.

**1.** Первый землекоп копал канаву столько времени, сколько второму землекопу требуется, чтобы выкопать эту канаву. Потом второй землекоп копал канаву столько времени, сколько первому требуется, чтобы выкопать $\frac{1}{4}$ этой канавы. В результате канаву выкопали за 9 часов. За сколько часов они выкопали бы эту канаву при совместной работе?

**Решение.** Представим, что у нас есть три одинаковые канавы. Пусть первый землекоп начал копать первую канаву, одновременно с ним второй начал копать вторую канаву. Первый землекоп перестанет копать первую канаву, когда второй выкопает вторую. Второй землекоп продолжит копать первую канаву, а первый начнёт копать третью канаву. Когда второй землекоп закончит копать первую канаву, первый выкопает $\frac{1}{4}$ третьей канавы.

Вся эта совместная работа будет длиться 9 ч и будет выкопано 1 + 1 + $\frac{1}{4}$ =
= 2$\frac{1}{4}$ канавы. На одну канаву землекопы тратят 9 : 2$\frac{1}{4}$ = 9 : $\frac{9}{4}$ = 4 (ч). Значит, при совместной работе они выкопают одну канаву за 4 ч.

**Ответ.** За 4 ч.

Отметим, что ситуация, описанная в задаче **1**, возможна, если 1-й выкапывает канаву за 12 ч, а второй – за 6 ч.

**2.** Первый землекоп копал канаву столько времени, сколько второму землекопу требуется, чтобы выкопать эту канаву. Потом второй землекоп копал канаву столько времени, сколько первому требуется, чтобы выкопать $\frac{2}{9}$ этой канавы. В результате канаву выкопали за 8 ч. За сколько часов они выкопали бы эту канаву при совместной работе?

**Решение.** Примем за единицу работу, совершаемую при выкапывании канавы. Пусть первый землекоп выкопает канаву за *x* ч, тогда в час он выкапывает $\frac{1}{x}$ канавы. Пусть второй землекоп выкопает канаву за *y* ч, тогда в час он выкапывает $\frac{1}{y}$ канавы.

По условию задачи первый копал *y* ч, значит, выкопал $\frac{y}{x}$ канавы. Потом второй копал $\frac{2x}{9}$ ч, значит, выкопал $\frac{2x}{9y}$ канавы. Так как работа была закончена за 8 ч, то составим два уравнения:

 *y* + $\frac{2x}{9}$ = 8, $\frac{y}{x}$ + $\frac{2x}{9y}$ = 1. (1)

Решив систему уравнений (1), получим *x* = $\frac{72}{5}$, *y* = $\frac{24}{5}$ или *x* = 9, *y* = 6. В обоих случаях время выкапывания канавы при совместной работе равно
1 : $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ = 3,6 (ч).

**Ответ.** За 3,6 ч.

**3.** Три землекопа копали канаву. Сначала первый землекоп работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, затем второй работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, наконец, третий работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта за 8 ч. За сколько часов землекопы вырыли бы канаву, если бы с самого начала работали вместе?

**Решение.** Примем за 1 работу, совершаемую при выкапывании канавы. Пусть первая, вторая и третья бригады в час выполняют части работы, выражаемые дробями *a*, *b*, *c*, и работали над выкапыванием первой канавы
*x* ч, *y* ч и *z* ч соответственно. Составим уравнения:

*x* + *y* + *z* = 8, (1)

*ax* + *by* + *cz* = 1, (2)

*x*(*b* + *c*) = $\frac{1}{2}$, (3)

*y*(*a* + *c*) = $\frac{1}{2}$, (4)

*z*(*a* + *b*) = $\frac{1}{2}$. (5)

Если система из этих пяти уравнений (1) – (5) с шестью неизвестными имеет решение, то сложив уравнения (2) – (5), получим новое уравнение, имеющее то же решение:

*ax* + *by* + *cz* + *bx* + *cx*+ *ay* + *cy*+ *az* + *bz* = 2,5.

Перепишем это уравнение в виде:

 (*a* + *b* + *c*)(*x* + *y* + *z*) = 2,5. (6)

Из уравнений (1) и (6) следует, что *a* + *b* + *c* = $\frac{5}{16}.$ Итак, при совместной работе трёх бригад за 1 ч выкапывают $\frac{5}{16}$ канавы, следовательно, одну канаву выкопают за 1 : $\frac{5}{16}$ = 3,2 (ч).

**Ответ.** За 3,2 ч.

Заметим, что ответ задачи получен из предположения, что система имеет решение. Строго говоря, требуется убедиться, что система имеет решение, иначе можно получить решение задачи, которая на самом деле не имеет решения, если в задаче описана невозможная ситуация (как в задаче **5**).

Проверка показывает, что шестёрка чисел

*a* = $\frac{1}{16}$, *b* = $\frac{1}{16}$, *c* =$\frac{3}{16}$, *x* = 2, *y* = 2, *z* = 4

является одним из решений системы. То есть система имеет хотя бы одно решение и в задаче описана возможная ситуация.

Следующая задача является обобщением задачи **3**. В ней не задано время выкапывания канавы.

**4.** Три землекопа копали канаву. Сначала первый землекоп работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, затем второй работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву, наконец, третий работал половину времени, необходимого двум другим, чтобы вырыть всю канаву. В результате канава была вырыта. Во сколько раз быстрее была бы вырыта канава, если бы с самого начала работали все трое вместе?

**Решение.** Пусть три бригады совместно копают одинаковые канавы следующим образом. Пока первая бригада копает часть первой канавы, вторая и третья выкопают половину второй канавы. Пока вторая бригада продолжает копать первую канаву, первая и третья закончат копать вторую канаву. Пока третья бригада заканчивает копать первую канаву, первая и вторая выкопают половину третьей канавы. Тогда за то время, за которое три бригады выкопали первую канаву, работая по очереди, при совместной работе три бригады выкопают 2,5 канавы, значит, одну канаву они выкопают при совместной работе в 2,5 раза быстрее, чем работая по очереди.

**Ответ.** В 2,5 раза.

Нетрудно убедиться, что в задаче **3** время совместного выкапывания канавы в 2,5 раза меньше, чем время поочерёдного выкапывания канавы.

**5.** Первая бригада копала канаву столько времени, сколько требуется второй и третьей бригаде, чтобы выкопать эту канаву при совместной работе. Потом вторая бригада копала ту же канаву столько времени, сколько на всю канаву затратили бы первая и третья бригады при совместной работе. Закончила работу третья бригада. Она копала столько времени, сколько затратили бы первая и вторая бригады на всю канаву при совместной работе. Канава была выкопана за 12 ч. За сколько часов три бригады выкопали бы
канаву при совместной работе?

Сначала заметим, что если бы мы не знали, что ситуация, описанная в задаче **5**, невозможна, то мы могли бы получить «ответ» одним из двух способов.

*I способ.* Пусть три бригады совместно копают четыре одинаковые канавы следующим образом. Пока первая бригада копает часть первой канавы, вторая и третья выкопают вторую канаву. Пока вторая бригада продолжает копать первую канаву, первая и третья выкопают третью канаву. Пока третья бригада заканчивает копать первую канаву, первая и вторая выкопают четвёртую канаву. Тогда за 12 ч совместной работы три бригады выкопают 4 канавы, значит, одну канаву они выкопают за 12 : 4 = 3 (ч).

*II способ.* Примем за 1 работу, совершаемую при выкапывании канавы. Пусть первая, вторая и третья бригады в час выполняют части работы, выражаемые дробями *a*, *b*, *c*, и работали над выкапыванием первой канавы
*x* ч, *y* ч и *z* ч соответственно. Составим уравнения:

*x* + *y* + *z* = 12, (1)

*ax* + *by* + *cz* = 1, (2)

*x*(*b* + *c*) = 1, (3)

*y*(*a* + *c*) = 1, (4)

*z*(*a* + *b*) = 1. (5)

Если система, из этих пяти уравнений (1) – (5) с шестью неизвестными имеет решение, то сложив уравнения (2) – (5), получим новое уравнение, имеющее то же решение:

*ax* + *by* + *cz* + *bx* + *cx*+ *ay* + *cy*+ *az* + *bz* = 4.

Перепишем это уравнение в виде:

 (*a* + *b* + *c*)(*x* + *y* + *z*) = 4. (6)

Из уравнений (1) и (6) следует, что *a* + *b* + *c* = $\frac{1}{3}.$ Итак, при совместной работе трёх бригад за 1 ч выкапывают $\frac{1}{3}$ канавы, следовательно, одну канаву выкопают за 1 : $\frac{1}{3}$ = 3 (ч).

**«Ответ».** За 3 ч.

А теперь докажем, что ситуация, описанная задаче **5**, невозможна.

**Доказательство.** Будем использовать введённые выше обозначения. Предположим, что существуют положительные числа *a*, *b*, *c*, *x*, *y* и *z*, для которых уравнения (1) – (5) обращаются в верные числовые равенства. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

*a* ≤ *b* ≤ *c* (7)

(если это не так, то буквой *a* обозначим наименьшую производительность труда и т. д.).

На основании свойств неравенств для положительных чисел, из двойного неравенства (7) получим верные неравенства:

*a* + *c* ≤ *b* + *c*,(8)

*a* + *b* ≤ *a* + *c*.(9)

Из уравнений (3) и (4) следует, что *x*(*b* + *c*) = *y*(*a* + *c*), тогда из этого равенства и из неравенства (8) следует, что *x* ≤ *y*. Из уравнений (4) и (5) следует, что *y*(*a* + *c*) = *z*(*a* + *b*), тогда из этого равенства и из неравенства (9) следует, что *y* ≤ *z*, т. е. верно двойное неравенство

*x* ≤ *y* ≤ *z*.(10)

На основании свойств неравенств для положительных чисел, из двойных неравенств (7) и (10) получим верное двойное неравенство:

*ax* ≤ *by* ≤ *cz*.(11)

Так как *ax* > 0, то из верного числового равенства (2) следует, что

*by* + *cz* < 1.(12)

Заменив в неравенстве (12) числа *y* и *z* на не превосходящее их число *x*, получим верное неравенство

*bx* + *cx* < 1,

противоречащее равенству (3). Следовательно, не существуют положительные числа *a*, *b*, *c*, *x*, *y* и *z*, для которых уравнения (1) – (5) обращаются в верные числовые равенства. Это означает, что ситуация, описанная в задаче **5**, невозможна.

При подготовке материала использованы задачи, опубликованные на страницах <http://math.all-tests.ru/node/290> и <http://mmmf.msu.ru/>.