**Новогоднее уравнение и рассуждения с числовыми значениями**

А.В. Шевкин,
 avshevkin@mail.ru

Рассмотрим решение уравнения, в котором есть и тригонометрия, и модули, и арифметические корни, и новогодние мотивы.

**1.** Решите уравнение

$\sin(\frac{(2018x-2017)π}{2})-1=\left|\sqrt{2018x-2017}-\sqrt{2018-2017x}\right|.$(1)

**Решение.** Если существует корень $x\_{0}$, то верно числовое равенство:

$\sin(\frac{(2018x\_{0}-2017)π}{2})-1=\left|\sqrt{2018x\_{0}-2017}-\sqrt{2018-2017x\_{0}}\right|.$(2)

Так как все числовые выражения в равенстве (2) определены, то любое число $x\_{0}$ удовлетворяет системе:

$$\left\{\begin{array}{c}2018x\_{0}-2017\geq 0,\\2018-2017x\_{0}\geq 0,\end{array}\right.$$

т. е. удовлетворяют двойному неравенству:

 $\frac{2017}{2018}\leq x\_{0}\leq \frac{2018}{2017}$. (3)

Правая часть равенства (2) неотрицательна, следовательно, и левая часть равенства (2) неотрицательна, что возможно лишь при условии:

$\sin(\frac{(2018x\_{0}-2017)π}{2})=1$,

откуда следует, что все числа $x\_{0}$ находятся из равенства:

$\frac{(2018x\_{0}-2017)π}{2}$ = $\frac{π}{2}+2π$*n*, где *n* $\in $ **Z**,

т. е. по формуле:

$x\_{0}=1+ \frac{4n}{2018}$, где *n* $\in $ **Z**.

Подставив $1+ \frac{4n}{2018}$ вместо $x\_{0}$ в двойное неравенство (3), получим двойное неравенство:

$-\frac{1}{2018}\leq \frac{4n}{2018}\leq \frac{1}{2017},$

которое выполняется лишь для целого *n* = 0. Это означает, что если уравнение (1) имеет корень $x\_{0}$, то этот корень равен 1. Проверкой убеждаемся, что $x\_{0}=1$ действительно является корнем уравнения (1).

**Ответ.** 1.

А теперь решим задания без новогодней тематики.

**2.** Решите уравнение

$\sqrt{-x^{2}+10x-24}-1=\left|log\_{2}(x-3)-\sin(\frac{(5x-24)π}{2})\right|.$(4)

**Решение.** Если существует корень $x\_{0}$, то верно числовое равенство:

$\sqrt{1-(x\_{0}-5)^{2}}-1=\left|log\_{2}(x\_{0}-3)-\sin(\frac{(5x\_{0}-24)π}{2})\right|.$(5)

Так как правая часть равенства (5) неотрицательна, то его левая часть тоже неотрицательна, что возможно лишь при $x\_{0}$ = 5. При этом левая часть равенства (5) равна 0. Остаётся проверить, равна ли нулю при $x\_{0}$ = 5 правая часть равенства (5). Так как при $x\_{0}$ = 5

$\left|log\_{2}(5-3)-\sin(\frac{(25-24)π}{2})\right|$ = 0,

то $x\_{0}$ = 5 — единственный корень уравнения (4).

**Ответ.** 5.

**3.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{-x^{2}+10x-24}-1=\left|log\_{2}(x-a)-\sin(\frac{(5x-24)π}{2})\right|$ (6)

имеет единственный корень.

**Решение.** Если существует корень $x\_{0}$, то верно числовое равенство:

$\sqrt{1-(x\_{0}-5)^{2}}-1=\left|log\_{2}(x\_{0}-a)-\sin(\frac{(5x\_{0}-24)π}{2})\right|.$(7)

Рассуждая как в решении задания **3**, получим, что левая часть равенства (7) неотрицательна лишь при $x\_{0}$ = 5. При этом левая часть равенства (7) равна 0. Так как $при x\_{0} = 5 $

$\sin(\frac{(5x\_{0}-24)π}{2})$ = $\sin(\frac{(25-24)π}{2})$ = 1,

то равенство (7) верно лишь при *a* = 3. То есть уравнение (6) имеет единственный корень при *a* = 3.

**Ответ.** При *a* = 3.

**4.** Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$\sqrt{-x^{2}+10x-24}-1=\left|log\_{2}(x-3)-\sin(\frac{(5x-a)π}{2})\right|$(8)

имеет единственный корень.

**Решение.** Если существует корень $x\_{0}$, то верно числовое равенство:

$\sqrt{1-(x\_{0}-5)^{2}}-1=\left|log\_{2}(x\_{0}-3)-\sin(\frac{(5x\_{0}-a)π}{2})\right|.$(9)

Рассуждая как в решении задания **3**, получим, что левая часть равенства (9) неотрицательна лишь при $x\_{0}$ = 5. При этом левая часть равенства (9) равна 0. Так как при $x\_{0}$ = 5

$log\_{2}(x\_{0}-3)$ = $log\_{2}(5-3)$ = 1,

то равенство (9) верно лишь при условии $\frac{(5x\_{0}-a)π}{2}$ = $\frac{(25-a)π}{2}$ = $\frac{π}{2}+2πk$, где
$k$ $\in $ **Z**. Откуда получим, что *a* = 24 – 4$k$, где $k$ $\in $ **Z**. То есть уравнение (8) имеет единственный корень при *a* = 24 – 4$k$, где $k$ $\in $ **Z**.

**Ответ.** При *a* = 24 – 4$k$, где $k$ $\in $ **Z**.