**«Сердечные» задания с параметром**

Шевкин А.В., avshevkin@mail.ru

Дело было вечером,

Делать было нечего…

С.В. Михалков.

На зимних каникулах 2016/2017 учебного года мне тоже делать было нечего. «Давненько не брал я в руки… параметров, — сказал я себе, — надо посмотреть, чем теперь радуют школьников и учителей в новых сборниках к ЕГЭ-2017». Нарешав чужих задач на небольшую книжечку, я принялся сочинять свои. Так появились задачи, часть из которых приведена в данной заметке.

1. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$\left\{\begin{array}{c} (|x|-1)^{2}+ (|a|-1)^{2}=1, \\a(x^{2}+ a^{2}-1)\geq 0 \end{array}\right.$ (1)

имеет три решения (*x*; *a*).

**Решение.** Каждое решение системы (1) будем изображать точкой (*x*; *a*) координатной плоскости *xOa*. Сначала изобразим все точки, удовлетворяющие уравнению системы (1).

Если *x* ≥ 0, *a* ≥ 0, то получатся все точки окружности с центром (1; 1) и радиусом 1. В каждом из трёх оставшихся случаев *x* ≥ 0, *a* ≤ 0, *x* ≤ 0, *a* ≥ 0, *x* ≤ 0, *a* ≤ 0 также получатся окружности (рис. 1).

Отберём из полученных решений те, которые являются решениями неравенства системы (1).

Если *a* = 0, то неравенство системы (1) выполняется для любых пар (*x*; 0). В этом случае получаем точки (–1; 0), (1; 0).

Если *a* > 0, то неравенство системы (1) выполняется только в том случае, если $x^{2}+ a^{2}\geq 1$, то есть только для тех пар чисел (*x*; *a*), для которых точки (*x*; *a*) лежат вне окружности π с центром (0; 0) и радиусом 1 и на этой окружности.

Таким образом, все решения (*x*; *a*) системы в случаях *a* = 0и *a* > 0 изображаются точками (*x*; *a*), лежащими одновременно на двух верхних окружностях, на окружности π и вне этой окружности На рисунке 2 эти точки выделены жирной линией.

Аналогично рассуждая для *a* < 0, получим все точки (*x*; *a*), лежащие одновременно на двух нижних окружностях, внутри окружности π и на этой окружности. Точки (–1; 0), (1; 0) в это множество не входят, они были получены в первом случае. На рисунке 2 все такие точки также выделены жирной линией. Для большей наглядности остальные части четырёх окружностей и окружность π показаны пунктиром.

Таким образом, все решения (*x*; *a*) системы изображены точками фигуры, выделенной жирной линией на рисунке 2. Получилось изображение «сердца».

Теперь можно ответить на вопрос задачи. Система (1) имеет решения для каждого числа *a* из промежутка –1 $\leq $ *a* $\leq $ 2, причём три решения (три и больше) она имеет для 1 $\leq $ *a* < 2.

**Ответ.** 1 $\leq $ *a* < 2.

Вот ещё вариации на «сердечную» тему.

1. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система (1)

имеет **ровно** три решения (*x*; *a*).

**Ответ.** *a* = 1.

1. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$\left\{\begin{array}{c} (|x|-1)^{2}+ (|a|-1)^{2}=1, \\a(\left|x\right|+ \left|a\right|-1)\geq 0 \end{array}\right.$ (2)

имеет два решения (*x*; *a*).

**Ответ.** 1 $<$ *a* $\leq $ 2.

1. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система (2)

имеет **ровно** два решения (*x*; *a*).

**Ответ.** 1 $<$ *a* < 1; *a* = 2.

Книга

А.В. Шевкин. ЕГЭ. Задача 18. Параметры. От простого к сложному

выйдет в Издательстве БИНОМ (холдинг ПРОСВЕЩЕНИЕ).