**Задачи 19 из ЕГЭ. Задачи про турниры**

Начнём с подготовительных задач.

**1.** В турнире по шахматам каждый участник сыграл с остальными по две партии. За выигрыш в партии присуждали 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. Три лучших игрока набрали вместе 24 очка, что составило половину от числа очков остальных участников вместе взятых. Сколько было участников турнира? [\*][[1]](#footnote-1)

**Решение.** Пусть участников турнира *x* человек, *х* — натуральное число, они сыграли  = *х*2 *– x* партий и набрали *х*2 *– x* очков. Всего очков было 24 + 24⋅2 = 72. Решив уравнение *х*2 *– x* = 72, получим два корня *x*1 = 9 и *x*2 = – 8. Так как *х* — натуральное число, то *x* = 9.

**Ответ.** 9 участников.

**2.** Шесть мальчиков и четыре девочки организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Девочки вместе набрали 40 очков. Кто выиграл больше очков: мальчики у девочек или девочки у мальчиков, и на сколько? [\*]

**Решение.** Участников турнира было 6 + 4 = 10. Они сыграли  =
= 45 партий и набрали 45 ⋅ 2 = 90 (очков) независимо от исходов отдельных партий. По условию задачи девочки набрали 40 очков, тогда мальчики набрали 90 – 40 = 50 очков. Чтобы ответить на вопрос задачи, рассмотрим «турнир в турнире» — игры девочек между собой. В них сыграно  = 6 партий и набрано 6⋅2 = 12 (очков). Остальные 40 – 12 = 28 очков девочки выиграли у мальчиков.

Аналогично мальчики в играх между собой набрали 30 очков, значит, мальчики выиграли у девочек 50 – 30 = 20 очков. Итак, девочки выиграли у мальчиков на 28 – 20 = 8 очков больше, чем мальчики у девочек.

**Ответ.** Девочки выиграли у мальчиков на 8 очков больше.

**3.** В шахматном турнире участвовали учащиеся 10 класса и два ученика 9 класса. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Два девятиклассника набрали вместе 7 очков, а все десятиклассники набрали очков поровну. Сколько десятиклассников участвовало в турнире? [\*]

**Решение.** Пусть из 10 класса в турнире участвовало *х* человек, *х* — натуральное число, тогда всех участников было (*х* + 2) человека и они набрали вместе (*х +* 2)(*х* + 1) = *х*2 *+* 3*x* + 2 (очков). Тогда десятиклассники набрали на 7 очков меньше: *х*2 *+* 3*x* – 5 очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен *х*2 *+* 3*x* – 5 делится на *х*,т. е. количество очков, набранных каждым учащимся 10 класса, равно  и является натуральным числом. Это возможно лишь при *х* = 1или при *х =* 5. В первом случае число очков каждого десятиклассника отрицательное, что не отвечает условию задачи. Следовательно, в турнире участвовало 5 десятиклассников.

**Ответ.** 5 десятиклассников.

**4.** Несколько учащихся 9 «а» и 9 «б» классов организовали турнир по шашкам. Каждый участник турнира сыграл с остальными по одной партии. За выигрыш в партии присуждали 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали вместе 26 очков, а учащиеся 9 «б» класса, которых было на 3 больше, набрали очков поровну. Сколько было участников турнира? [\*]

**Решение.** Пусть в турнире участвовало: из 9 «а» класса *х* человек, из 9 «б» класса (*х* + 3) человек, *х* — натуральное число, тогда всех участников было (2*х* + 3) человека и они набрали вместе (2*х +* 3)(2*х* + 2) = 4*х*2 *+* 10*x* + 6 очков. Учащиеся 9 «а» класса набрали 26 очков, учащиеся 9 «б» класса
4*х*2 *+* 10*x* – 20 очков. Так как они набрали очков поровну, то многочлен
4*х*2 *+* 10*x* – 20 делится на *х* + 3,т. е. количество очков, набранных каждым учащимся 9 «б» класса, равно  и является натуральным числом. Это возможно лишь при *х* = 4 или *х* = 11.

Второй случай не удовлетворяет условиям задачи, так как только в играх друг с другом 11 учащихся 9 «а» класса наберут 110 очков, что больше 26. Следовательно, участников турнира было 2 $∙4$ + 3 = 11.

**Ответ.** 11 участников.

**5.** В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчи­ков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если из­вестно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки? [1-6][[2]](#footnote-2)

**Решение.** Если *n* человек проводят турнир и каждый играет с каждым одну партию, то будет сыграно $\frac{n∙(n - 1)}{2}$ партий. В данной задаче каждый играет с каждым по 2 партии, поэтому будет сыграно *n*(*n* – 1) партий, а так как в каждой партии разыгрывается одно очко, то будет получено *n*(*n* – 1) очков.

а) Три девочки провели между собою 3 $∙2$ = 6 партий и набрали 6 очков. Если бы они выиграли все 3 $∙2∙5$ = 30 партий у мальчиков, то набрали бы ещё 30 очков. Тогда наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, равно 6 + 30 = 36.

б) Все 9 участников сыграют 9 $∙8$ = 72 партии и наберут 72 очка.

в) Пусть в турнире играли 1 девочка и 9 мальчиков. В лучшем случае девочка выиграет все $9∙2= 18$ партий у мальчиков и наберёт 18 очков. Мальчики в играх между собою сыграют $9∙8$ = 72 партии и наберут 72 очка — ровно в 4 раза больше, чем сумма очков девочки, что соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире могла играть одна девочка. Выясним, могло ли девочек быть больше.

Пусть теперь будет 2 девочки и 18 мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все $2∙18∙2= 72$ партии у мальчиков и наберут 72 очка. Да ещё в 2-х играх между собою девочки наберут 2 очка. Всего девочки наберут 72 + 2 = 74 очка. Мальчики в играх между собою сыграют $18∙17$ = 306 партий и наберут 306 очков, 306 : 74 > 4, что не соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире не могли играть две девочки.

Дальше с увеличением числа девочек отношение числа очков, набранных мальчиками, к числу очков, набранных девочками, будет увеличиваться. Докажем это.

Пусть в турнире играли *n* девочек и 9*n* мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все $n∙9n∙2= 18n^{2}$ партий у мальчиков и наберут $18n^{2}$ очков. Да ещё в $n∙(n - 1)$ = $n^{2}-n$ партиях между собою девочки набе­рут $n^{2}-n$ очков. Всего они наберут $18n^{2}$ + $n^{2}-n$ = $19n^{2}-n$ очков. В этом случае мальчики в играх между собою сыграют $9n∙(9n-1)$ =
= 81$n^{2}-9n$ партий и наберут 81$n^{2}-9n$ очков. Так как при любом *n* ≥ 2 $\frac{81n^{2}- 9n}{19n^{2}- n}=\frac{81n - 9}{19n - 1}=\frac{4(19n -1)}{19n - 1}$ + $\frac{5n -5}{19n - 1}=4+\frac{5n -5}{19n - 1}$ > 4, то в турнире не могли играть больше одной девочки.

Следовательно, могла быть только 1 девочка.

**Ответ.** а) 36; б) 72; в) 1.

**9.6.** В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие три мальчи­ков и две девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников десять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если из­вестно, что их в 7 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в три раза больше очков, чем девочки? [2-44]

**Ответ.** а) 14; б) 90; в) 1.

**Литература**

**1. ЕГЭ-2017** : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.

1. Звёздочкой помечены задачи, составленные в дополнение к сборнику [1], они нужны, чтобы лучше освоиться сюжетом задачи. [↑](#footnote-ref-1)
2. Задача из сборника [1], вариант 6. [↑](#footnote-ref-2)