**Тригонометрическое уравнение с модулем**

А.В. Шевкин,
 avshevkin@mail.ru

Рассмотрим решение не совсем обычного тригонометрического уравнения.

1. Решите уравнение

(1)

**Решение.** Решим уравнение (1) на множестве *M* всех чисел *x*, таких, что ≠ 0. Для всех чисел этого множества определён и дробь имеет смысл.

Так как , то на множестве *M* уравнение (1) равносильно уравнениям:

,

,

(2)

Решим уравнение (3) графическим способом.

Функция *y* на промежутке убывает, а на промежутке возрастает. За пределами отрезка функция принимает значения, большие 1. График этой функции есть пара лучей, выходящих из точки (см. рис.).

Рассмотрим функцию *y* = на отрезке . График функции
*y* = есть синусоида, сжатая по оси *Ox* так, что половина периода функции равна 3 (см. рис.). Два графика имеют общие точки лишь на отрезке . Докажем, что таких точек только две: и .



За пределами отрезка нет точек пересечения графиков, так как левее точки *x* = и правее точки *x* = первая функция принимает значения, большие 1, а вторая функция на всей своей области определения принимает значения не большие 1.

На отрезке первая функция убывает, а вторая возрастает, поэтому на этом отрезке графики имеют не более одной общей точки. Одну — с абсциссой *x* = — мы нашли, других нет.

Рассмотрим на отрезке функцию *f* (*x*) = – . *f*  > 0, *f*  = 0. Докажем, что на отрезке функция *f* (*x*) убывает — это будет означать, что *x* = единственная точка этого отрезка, в которой выполняется равенство (2), то есть кроме *x* = уравнение (2) на рассматриваемом отрезке не имеет корней.

Так как *f*  *'* (*x*) = – и < , то внутри отрезка верно неравенство *f*  *'* (*x*) < 0, то есть на этом отрезке функция убывает.

Итак, *x* = единственный корень уравнения (2) на отрезке , следовательно, уравнение (2) имеет ровно два корня и . Проверим, принадлежат ли эти числа множеству *M*, т. е. выполняется ли для каждого из них условие ≠ 0.

Если *x* = , то = ≠ 0, следовательно, — корень уравнения (1).

Если *x* = , то = = 0, следовательно, не является корнем уравнения (1).

**Ответ.** .