**Куда идём мы с ЕГЭ – большой, большой секрет?**

****

А.В. Шевкин,
avshevkin@mail.ru

*Куда идём мы с Пятачком?*

*Большой, большой секрет.*

*И не расскажем мы о нём,*

*О нет, и нет, и нет.*

Помнится, довелось мне комментировать для «Троицкого варианта» появление нового формата ЕГЭ, который ввели как обязательный с 2009 года. Тогда я писал: «Если же проведенные изменения всерьёз и надолго, то это полная катастрофа школьного математического образования. Тогда неспособные к освоению школьного курса дети окончательно сядут на шею учителю. Им будет дан важный ориентир: «Не парьтесь, ребята! Научитесь типа решать 5 задач из списка и считайте, что вы как бы получили математическое образование». На таком общем уровне еще ниже упадет обучение в спецклассах, в вузах, упадет математическая наука. Россия повторит эксперимент, проведенный Адольфом Гитлером, который разогнал передовые научные математические школы Германии. Эти школы, как считают математики, не могут восстановиться до сих пор. Но нам отрицательный опыт других стран не интересен. Мы на себе хотим испытать последствия бездумного реформирования образования. Мы так любим героически преодолевать трудности, которые сами себе создаем!» [1]

С той поры прошло без малого 10 лет, не пора ли уже подвести «юбилейные» итоги предсказанного разгрома школьного математического образования в России? О нём больше меня знают преподаватели вузов, которые стали получать некондиционный «материал», из которого пытаются вылепить специалистов – учителей, врачей, преподавателей вузов, ученых, военных, инженеров и изобретателей. То-то будет, когда вылепленные ими преподаватели начнут лепить следующее поколение учителей, врачей… «Жаль только – жить в эту пору прекрасную / Уж не придется – ни мне, ни тебе».

Здесь я остановлюсь только на одном характерном признаке деградации, на снижении требований к математической подготовке выпускников школ – простите, образовательных организаций – на итоговом испытании. Заметьте, эти изменения произошли в рамках одной и той же победившей концепции ЕГЭ, при работе одних и тех же модераторов этого действа – свои просчёты им не удастся переложить на плечи предшественников.

Новый формат ЕГЭ, как я и предсказывал, уронил уровень математической подготовки школьников. Теперь их нельзя контролировать по вариантам, аналогичным демонстрационному варианту 2008 года, который я тогда очень вежливо критиковал – будет много «двоек» по старым критериям. Или, с потерей лица, критерии придётся опускать ниже плинтуса. Поэтому, с традиционными «заботой о детях» и «ответом на запросы трудящихся», экзамен разделили на два уровня – базовый и профильный. Тем самым единство требований ко всем выпускникам – одно из главных преимуществ ЕГЭ, которым так гордились отцы-основатели ЕГЭ, отправлено в мусорную корзину! ЕГЭ утратил букву «Е» и превратился просто в ГЭ!

Теперь выпускники школы, не утруждавшие себя работой на уроках математики, отчитываются о получении среднего математического образования на экзамене базового уровня, не демонстрируя ничего, что подтверждало бы наличие этого образования! Для получения положительной отметки они могут решить несколько задач по программе 5-7 классов. Спрашивается, а зачем государство допускает колоссальное нецелевое расходование средств, если обучившийся на выходе из 11-летки демонстрирует, что он зря посещал уроки математики в 8-11 классах?

Среди задач для выпускников 11-летней школы мы находим много задач, знакомых нам по учебникам для 5—6 классов: задача про улитку, ползущую по дереву, задачи про лилии в пруду и бактерии в стакане. В просторах Интернета увлечённо решают задачу, аналогичную задаче 181 из учебника «Математика, 6» (С. М. Никольский и др.).

* Каждую секунду бактерия делится на две новые бактерии. Известно, что весь объём одного стакана бактерии заполнят за 1 час. За сколько секунд бактерии заполнят половину стакана?

Забавно, что вариант этой задачи есть и в казахстанском ЕНТ[[1]](#footnote-1) с названием «Математическая грамотность» (редакция сохранена):

* На поверхности пруда плавает одна кувшинка, которая постоянно разрастается. Таким образом, площадь, которую занимают кувшинки, каждый день увеличивается в два раза. Через четыре недели вся поверхность пруда зарастает кувшинками. Если изначально на пруде будет две кувшинки, за сколько дней зарастёт весь пруд?

Специально привожу скриншот решения этой задачи обучающим казахстанских выпускников решению этой задачи. На плохом фото вы различите формулы для геометрической прогрессии. Замечу, что российские обучающие решению первой задачи пока ещё демонстрируют знание математического фольклора. Посмотрим, что будет, когда наши выпускники, сдающие ЕГЭ профильного уровня, станут учителями и преподавателями.

 Это обычная занимательная задача для 5-6 классов. Похожая есть в нашей с И.Ф. Шарыгиным книжке «Задачи на смекалку» и в учебнике для 6 класса (№ 180). В описанном в задаче процессе две кувшинки будет спустя 1 день, значит, из 28 дней надо исключить этот 1 день. Получим 27 дней. Зачем же в решении так «много букофф», как пишут теперь в Интернете?

Среди задач ЕНТ замечена ещё одна задача.

* В коробке лежат 10 синих и 10 красных ручек. Сколько ручек, не глядя в коробку, надо вынуть, чтобы среди них обязательно нашлось 4 ручки одного цвета?

Тот же обучающий казахстанских выпускников рисует карандаши двух цветов, перебирает все ответы, начиная с меньшего… вместо того, чтобы делать так, как мы учим в книжке «Задачи на смекалку».

Рассмотрим худший случай. Пусть мы уже вынули 3 красные и 3 синие ручки – всё равно в каком порядке. Чтобы получить 4 ручки одного цвета – всё равно какого – достаточно вынуть ещё одну ручку, т. е. всего надо вынуть 7 ручек.

Примеры решений из неродного ЕНТ я привёл в качестве прогноза для завтрашнего дня российского математического образования, если у нас не хватит сил переломить опасное направление его реформирования. Впрочем, давайте вернёмся к родным осинам.

 В 2010 году я отчаянно боролся с задачами С-6, многие из которых не поддавались мне в силу специфики моего предыдущего опыта, мало связанного с олимпиадным движением. Вместе с Ю.О. Пукасом мы опубликовали книжку, которая была популярной. Но прошло несколько лет и ЕГЭ профильного уровня изменился существенно, место сложных последних задач заняли другие задачи, о которых мы и погорим далее. Приведу тексты задач по сборнику [2] и свои подробные решения, приготовленные для книжки «Задачи 19 из ЕГЭ. От простого к сложному» (книжки, посвященные задачам 17 и 18 сданы в издательство БИНОМ). Мои аналоги задач ЕГЭ помечены знаком [\*].

**Построение солдат**

**1.** В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 46, а вместе солдат меньше, чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат? [2-9][[2]](#footnote-2)

**Решение.** Пусть в первом взводе *a* солдат, а во втором — *b* солдат, *a* и *b —* натуральные числа, *a* < *b*, *a* ≥ 47, *b* ≥ 48, *a* + *b* ≤ 110. Следовательно, *a* и *b* удовлетворяют неравенствам:

47 ≤ *a* ≤54, 48 ≤ *b* ≤ 63, *a* + *b* ≤ 110. (1)

Верхняя граница для числа *a* получена из неравенства *a* + *b* ≤ 110 при условии, что *b* = *a* + 1.

а) Будем строить солдат по 9 в ряд. Так как в ряду нет солдат другого взвода, то число солдат каждого взвода делится на 9. Из неравенства (1) следует, что в 1-м взводе может быть лишь 6∙9 = 54 солдата, а во 2-м взводе их должно быть больше: 7∙9 = 63. Но так как 54 + 63 > 110, то солдат нельзя построить по 9.

Будем строить солдат по 10 в ряд. Из неравенства (1) следует, что в
1-м взводе может быть лишь 5∙10 = 50 солдат, но тогда во 2-м взводе их должно быть больше: 6∙10 = 60 солдат, 50 + 60 = 110. Следовательно, солдат можно построить по 10, в этом случае в 1-м взводе 50, во 2-м — 60 солдат.

б) Будем строить солдат по 13 в ряд. Из неравенства (1) следует, что в 1-м взводе может быть лишь 4∙13 = 52 солдата, но тогда во 2-м взводе их должно быть больше: 5∙13 = 65 солдат, 52 + 65 > 110. Следовательно, солдат нельзя построить по 13.

в) Рассмотрим оставшиеся случаи.

Из неравенства (1) следует, что солдат 1-го взвода, а значит и всех солдат, нельзя построить по 11.

Будем строить солдат по 12 в ряд. Из неравенства (1) следует, что в
1-м взводе может быть 4∙12 = 48, тогда во 2-м взводе солдат должно быть больше: 5∙12 = 60 солдат, 48 + 60 = 108. Следовательно, солдат можно построить по 12, в роте 48 + 60 = 108 солдат.

При дальнейшем увеличении числа солдат в ряду не выполняется хотя бы одно из неравенств (1), следовательно, в роте могло быть только 110 или 108 солдат.

**Ответ.** а) 50 и 60; б) нет; в) 110 или 108.

**Наибольшее из наименьших, или
Наименьшее из наибольших**

**2.** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 12 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифме­тических?

в) Найдите наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [\*]

**Решение.** а) Могут, например, в двух группах с разным количеством чисел (1, 2, 12) и (4, 6).

б) Могут, средние арифметические в трёх группах (3, 7), (4, 5, 6) и
(1, 2, 12) равны.

в) Так как три средние арифметические могут быть равны друг другу, то наибольшее возможное значение наименьшего из них будет меньше среднего арифметичес­кого восьми чисел, то есть числа 5.

Так как в группе не может быть больше шести чисел, то искомое число надо искать среди чисел вида 4 + $\frac{n-1}{n}$, где *n* – натуральное число, не превышающее 6.

Выясним, может искомое число быть равным4$\frac{5}{6}$ = $\frac{29}{6}$. Оказывается, может. Сумма 6 чисел должна быть равна 29, в неё входят 1, 2, 3, 4, 7, 12, оставшиеся числа 5 и 6 образуют две группы, средние арифметические которых больше, чем $\frac{29}{6}.$ Следовательно, наибольшее возможное значение наименьшего из получаемых трёх значений средних арифметических равно $\frac{29}{6}.$

**Ответ.** а) Да; б) да; в) $\frac{29}{6}$.

**3.** Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 16 произвольно делят на три группы так, чтобы в каждой группе было хотя бы одно число. Затем вычисляют значение среднего арифметического чисел в каждой из групп (для группы из одного числа среднее арифметическое чисел равно этому числу).

а) Могут ли быть одинаковыми два из этих трёх значений средних арифметических в группах из разного количества чисел?

б) Могут ли быть одинаковыми все три значения средних арифме­тических?

в) Найдите наименьшее возможное значение наибольшего из получаемых трёх значений средних арифметических. [2-10]

**Решение.** а) Могут, например, в двух группах с разным количеством чисел (2, 16) и (9).

б) Не могут, так как если средние арифметические в трёх группах чисел равны *x*, то сумма всех чисел 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 16 = 61 и равна

*nx* + *mx* + *kx* = (*n* + *m* + *k*)*x* = 10*x*,

где *n*, *m*, *k* – количество чисел в этих группах. Тогда *x* = 6,1, но такое среднее арифметическое можно получить, имея не меньше 10 чисел в каждой группе, а у нас всего 10 чисел на три группы.

в) Так как три средние арифметические не равны друг другу, то наименьшее возможное значение наибольшего из них будет больше среднего арифметичес­кого десяти чисел, то есть числа 6,1.

Так как в группе не может быть больше восьми чисел, то искомое число не может быть равным 6$\frac{1}{9}$.

Выясним, может искомое число быть равным6$\frac{1}{8}$. Если да, то в этой группе из 8 чисел и их сумма равна 49. В эту сумму обязательно входят 16, 9, 8, 7, так как эти числа в группах по 1, 2, 3 числа дают среднее арифметическое больше, чем 6$\frac{1}{8}$. Так как 16 + 9 + 8 + 7 = 40, то в эту группу нужно добавить ещё 4 числа, сумма которых 49 – 40 = 9, а наименьшая сумма из четырёх оставшихся чисел: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 > 9, следовательно, среднее арифметическое 6$\frac{1}{8}$получить невозможно.

Среднее арифметическое 6$\frac{1}{7}$ получить можно, так как

$\frac{16 + 9 + 8 + 4 + 3 + 2 + 1}{7} $= 6$\frac{1}{7}$

и средние арифметические чисел из двух групп (6) и (5, 7) меньше, чем 6$\frac{1}{7}$.

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) 6$\frac{1}{7}$.

**Переворачиваем карточки**

**4.** Имеется 8 карточек. На них записывают по одному числа –1, 2, 4,
–6, 7, –8, –10, 12. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел –1, 2, 4, –6, 7,
–8, –10, 12. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные 8 сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться? [2-15]

**Решение.** а) Ни на одной из карточек нельзя получить сумму 0, так как в предложенном списке чисел нет противоположных чисел. Ответ на вопрос: нет.

б) Так как все возможные суммы целые, то произведение 1 можно получить лишь в том случае, если можно составить 4 суммы с модулем 1, но таких сумм можно составить только три: –1 + 2, –6 + 7, –8 + 7. Ответ на вопрос: нет.

в) Для каждого из чисел предложенного списка (1-я строка таблицы) подберём число из того же списка чисел (2-я строка таблицы), чтобы их сумма имела наименьший модуль.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| –1 | 2 | 4 | –6 | 7 | –8 | –10 | 12 |
| 2 | –1 | –6 | 4 | –8 | 7 | 12 | –10 |

Вычислим суммы чисел на карточках (по столбцам таблицы) и произ­ведение этих сумм: 1∙1∙(–2)∙(–2)∙(–1)∙(–1)∙2∙2 = 16.

**Ответ.** а) Нет; б) нет; в) 16.

**Задачи про турниры**

**5.** В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчи­ков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если из­вестно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки? [2-6]

**Решение.** Если *n* человек проводят турнир и каждый играет с каждым одну партию, то будет сыграно $\frac{n∙(n - 1)}{2}$ партий. В данной задаче каждый играет с каждым по 2 партии, поэтому будет сыграно *n*(*n* – 1) партий, а так как в каждой партии разыгрывается одно очко, то будет получено *n*(*n* – 1) очков.

а) Три девочки провели между собою 3 $∙2$ = 6 партий и набрали 6 очков. Если бы они выиграли все 3 $∙2∙5$ = 30 партий у мальчиков, то набрали бы ещё 30 очков. Тогда наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, равно 6 + 30 = 36.

б) Все 9 участников сыграют 9 $∙8$ = 72 партии и наберут 72 очка.

в) Пусть в турнире играли 1 девочка и 9 мальчиков. В лучшем случае девочка выиграет все $9∙2= 18$ партий у мальчиков и наберёт 18 очков. Мальчики в играх между собою сыграют $9∙8$ = 72 партии и наберут 72 очка – ровно в 4 раза больше, чем сумма очков девочки, что соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире могла играть одна девочка. Выясним, могло ли девочек быть больше.

Пусть теперь будет 2 девочки и 18 мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все $2∙18∙2= 72$ партии у мальчиков и наберут 72 очка. Да ещё в 2-х играх между собою девочки наберут 2 очка. Всего девочки наберут 72 + 2 = 74 очка. Мальчики в играх между собою сыграют $18∙17$ = 306 партий и наберут 306 очков, 306 : 74 > 4, что не соответствует условиям задачи. Это означает, что в турнире не могли играть две девочки.

Дальше с увеличением числа девочек отношение числа очков, набранных мальчиками, к числу очков, набранных девочками, будет увеличиваться. Докажем это.

Пусть в турнире играли *n* девочек и 9*n* мальчиков. В лучшем случае девочки выиграют все $n∙9n∙2= 18n^{2}$ партий у мальчиков и наберут $18n^{2}$ очков. Да ещё в $n∙(n - 1)$ = $n^{2}-n$ партиях между собою девочки набе­рут $n^{2}-n$ очков. Всего они наберут $18n^{2}$ + $n^{2}-n$ = $19n^{2}-n$ очков. В этом случае мальчики в играх между собою сыграют $9n∙(9n-1)$ =
= 81$n^{2}-9n$ партий и наберут 81$n^{2}-9n$ очков. Так как при любом *n* ≥ 2 $\frac{81n^{2}- 9n}{19n^{2}- n}=\frac{81n - 9}{19n - 1}=\frac{4(19n -1)}{19n - 1}$ + $\frac{5n -5}{19n - 1}=4+\frac{5n -5}{19n - 1}$ > 4, то в турнире не могли играть больше одной девочки.

Следовательно, могла быть только 1 девочка.

**Ответ.** а) 36; б) 72; в) 1.

**Опросы: проценты и респонденты**

**6.** В результате опроса среди шестиклассников выяснилось, что примерно 56 % опрошенных любят математику (число 56 получе­но с помощью округления до целого числа). Из этого же опроса последовало, что примерно 33 % респондентов любят делать домашнюю работу по математике.

а) Могло ли в опросе участвовать ровно 20 человек?

б) Могло ли в опросе участвовать ровно 36 человек?

в) Какое наименьшее количество человек могло участвовать в этом опросе? [\*]

**Решение.** Пусть *a* – число опрашиваемых, респондентов, по-научному. Пусть утвердительно ответили на первый вопрос *x* человек из них, на второй вопрос – *y* человек.

Так как *x* составляет от *a* приближённо 56 %, то это приближение получено, если 0,555*a ≤ x <* 0,565*a*.

Так как *y* составляет от *a* приближённо 33 %, то это приближение получено, если 0,325*a ≤ y <* 0,335*a*.

а) Если *a* = 20, то 0,555∙20 = 11,1 *≤ x <* 0,565∙20 = 11,3. Не существует целое число *x*, удовлетворяющее этим неравенствам. Проверка второго неравенства не нужна. Ответ на вопрос: нет.

б) Если *a* = 36, то 0,555∙36 = 19,98 *≤ x <* 0,565∙36 = 20,34. Существует целое число *x*, удовлетворяющее этим неравенствам: *x* = 20.

Проверим выполнение второго неравенства.

0,325∙36 = 11,7 *≤ y <* 0,335∙36 = 12,06. Существует целое число *y* = 12, удовлетворяющее этим неравенствам. Ответ на вопрос: да.

в) Для ответа на третий вопрос выпишем результаты вычисления, аналогичные предыдущим, в виде таблицы. Причём, если для выбранного числа *a* нет целого значения *x* в полученном промежутке, то для *y* выполнять вычисления не нужно.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *a* | 0,555*a ≤ x <* 0,565*a* | 0,325*a ≤ y <* 0,335*a* |
| 1 | 0,555 *≤ x <* 0,565 |  |
| 2 | 1,11 *≤ x <* 1,13 |  |
| 3 | 1,665 *≤ x <* 1,695 |  |
| 4 | 2,22 *≤ x <* 2,26 |  |
| 5 | 2,775 *≤ x <* 2,825 |  |
| 6 | 3,33 *≤ x <* 3,39 |  |
| 7 | 3,885 *≤ x <* 3,955 |  |
| 8 | 4,44 *≤ x <* 4,52 |  |
| 9 | 4,995 *≤ x <* 5,085 | 2,925 *≤ y <* 3,015 |

Как видно из таблицы, последовательно расширяющийся промежуток значений *x* долго не включает в себя целых значений *x*. А при *a* = 9 (это наименьшее значение) существуют целые значения и *x*, и *y*, удовлетворя­ющие неравенствам 0,555*a ≤ x <* 0,565*a* и 0,325*a ≤ y <* 0,335*a*.

**Ответ.** а) Нет; б) да; в) 9.

*Замечание.* Запись вычислений при помощи таблицы удобна тем, что некоторые умножения можно заменять сложением чисел из предыдущих строчек таблицы. Например, границы для *x* при *a* = 3 можно получить сложением границ для *a* = 1 и *a* = 2.

В следующем разделе приведено подробное решение задачи 7. Они предназначены, скорее, для обучения поиску решения. Стоит напомнить, что на ЕГЭ перед выпускником не стоит задача написать возможно более подробное решение. В решении задания а) достаточно подобрать 4 члена последовательности и показать, что они удовлетворяют условиям задачи. И вообще, для утвердительного ответа на вопрос «Может ли…?» надо привести пример и показать, что он удовлетворяет условию задачи. А для отрицательного ответа требуется доказательство, что такой пример привести не удастся никому.

Решения заданий б) и в) следует описать возможно короче. Не надо провоцировать членов экспертной комиссии, проверяющей вашу работу, на повторение известной реплики Настасьи Тимофеевны из «Свадьбы» А.П. Чехова: «Нудный ты, ух нудный!»

**Конечная последовательность натуральных чисел**

**7.** Конечная возрастающая последовательность *a*1, *a*2, …, *an* состоит из *n* ≥ 3 натуральных чисел[[3]](#footnote-3), причём при всех натуральных *k* ≤ *n* – 2 выполнено равенство 3*ak +* 2 = 5*ak +* 1 – 2*ak*.

а) Приведите пример такой последовательности при *n* = 4.

б) Может ли в такой последовательности при некотором *n* ≥ 3 выпол­няться равенство *an* = 3*a*2 – 2*a*1?

в) Какое наименьшее значение может принимать *a*1, если *an* = 667?
[2-3]

**Решение.** Пусть дана возрастающая последователь­ность: *a*1, *a*2, *a*3, … Тогда для троек её последовательных членов должны выполняться равенства:

3*a*3 = 5*a*2 – 2*a*1, (1)

3*a*4 = 5*a*3 – 2*a*2, … (2)

а) Приведём один из способов получения тройки последовательных членов последовательности по её третьему члену: *a*3 – 5, *a*3 – 2, *a*3. Равенство (1) выполняется:

3*a*3 = 5(*a*3 – 2) – 2(*a*3 – 5).

В полученном равенстве отрицательные слагаемые в скобках можно одновременно удваивать, утраивать, … при этом будут получаться новые верные равенства:

3*a*3 = 5(*a*3 – 4) – 2(*a*3 – 10),

3*a*3 = 5(*a*3 – 6) – 2(*a*3 – 15), …

Так можно получать новые возрастающие последовательности из трёх чисел по заданному *a*3:

*a*3 – 10, *a*3 – 4, *a*3,

*a*3 – 15, *a*3 – 6, *a*3, …

В первой строке заменим *a*3 на *a*4, во второй строке – *a*3 на (*a*4 – 4):

*a*4 – 10, *a*4 – 4, *a*4,

*a*4 – 19, *a*4 – 10, *a*4 – 4,

получим последовательность из четырёх членов, удовлетворяющую условиям задачи:

*a*4 – 19, *a*4 – 10, *a*4 – 4, *a*4.

При *a*4 = 20 получим последовательность: 1, 10, 16, 20.

б) Покажем, что если при некотором *n* ≥ 3 выполняется равенство
*an* = 3*a*2 – 2*a*1, то *an* = *an*–1, т. е. последовательность не является возрас­тающей, а значит, не существует последовательность, удовлетворяющая равенству *an* = 3*a*2 – 2*a*1.

Так как при *n* = 3 должно выполняться равенство

*a*3 = 3*a*2 – 2*a*1, (3)

то, вычитая из равенства (1) равенство (3), получим, что

2*a*3 = 2*a*2,

*a*3 = *a*2.

Так как при *n* = 4 должны выполняться равенства (1) и (2), то, сложив эти равенства, получим, что

3*a*4 = 2*a*3 + 3*a*2 – 2*a*1. (4)

Так как *a*4 = 3*a*2 – 2*a*1, то из последнего равенства получим:

 3*a*4 = 2*a*3 + *a*4,

*a*4 = *a*3.

Так как при *n* > 4 должны выполняться равенства

3*a*3 = **5*a*2 – 2*a*1**,

3*a*4 = 5*a*3 – **2*a*2**,

3*a*5 = 5*a*4 – 2*a*3,

…

**3*an*–1** = 5*an*–2 – 2*an–*3,

**3*an*** = **5*an*–1** – 2*an–*2,

то, сложив эти равенства, получим неравенство

3*an* = 2*an*–1 + 3*a*2 – 2*a*1,

частным случаем которого (для *n* = 4) является неравенство (4).

Так как *an* = 3*a*2 – 2*a*1, то из последнего равенства получим:

 3*an* = 2*an*–1 + *an*,

*an* = *an*–1.

Итак, не существует последовательность, удовлетворяющая равенству *an* = 3*a*2 – 2*a*1.

в) Пусть задана возрастающая последователь­ность: *a*1, *a*2, 667. Для неё должно выполняться равенство:

3∙667 = 5*a*2 – 2*a*1,

2001 + 2*a*1 = 5*a*2.

Наименьшее значение *a*1, при котором верно это равенство, равно 2. Последовательность из трёх членов получена: 2, 401, 667. Выясним, можно ли при *a*1 = 1 получить *an* = 667.

Для этого будем строить последовательность с *a*1 = 1.

При *n* = 3 имеем последовательность 1, *a*2, *a*3 и верное равенство

3*a*3 = 5*a*2 – 2. (5)

Из равенства (5) следует, что при делении на 3 число *a*2 может иметь только остаток 1, т. е. *a*2 = 3*b* + 1, где $b\in N$. Получили последовательность: 1, 3*b* + 1, 5*b* + 1, но 5*b* + 1 ≠ 667.

При *n* = 4 имеем последовательность 1, 3*b* + 1, 5*b* + 1, *a*4 и верное равенство

3*a*4 = 5*a*3 – 2*a*2,

3*a*4 = 5(5*b* + 1) – 2(3*b* + 1),

3*a*4 = 19*b* + 3.

Последнее равенство может быть верно лишь при *b* = 3*c*, где $c\in N$. Получили последовательность: 1, 9*c* + 1, 15*c* + 1, 19*c* + 1, но 19*c* + 1 ≠ 667.

При *n* = 5 имеем последовательность 1, 9*c* + 1, 15*c* + 1, 19*c* + 1, *a*5 и верное равенство

3*a*5 = 5*a*4 – 2*a*3,

3*a*5 = 5(19*c* + 1) – 2(15*c* + 1),

3*a*5 = 65*c* + 3.

Последнее равенство может быть верно лишь при *c* = 3*d*, где $d\in N$. Получили последовательность: 1, 27*d* + 1, 45*d* + 1, 57*d* + 1, 65*d* + 1, но
65*d* + 1 ≠ 667.

При *n* = 6 имеем последовательность 1, 27*d* + 1, 45*d* + 1, 57*d* + 1,
65*d* + 1, *a*6 и верное равенство

3*a*6 = 5*a*5 – 2*a*4,

3*a*6 = 5(65*d* + 1) – 2(57*d* + 1),

3*a*6 = 211*d* + 3.

Последнее равенство может быть верно лишь при *d* = 3*e*, где $e\in N$. Получили последовательность: 1, 81*e* + 1, 135*e* + 1, 171*e* + 1, 195*e* + 1,
211*e* + 1, но 211*e* + 1 ≠ 667.

При *n* = 7 имеем последовательность 1, 81*e* + 1, 135*e* + 1, 171*e* + 1,
195*e* + 1, 211*e* + 1, *a*7 и верное равенство

3*a*7 = 5*a*6 – 2*a*5,

3*a*7 = 5(211*e* + 1) – 2(195*e* + 1),

3*a*7 = 665*e* + 3.

Последнее равенство может быть верно лишь при *e* = 3*f*, где $f\in N$. Получили последовательность: 1, 243*f* + 1, 405*f* + 1, 513*f* + 1, 585*f* + 1,
633*f* + 1, 665*f* + 1, но 665*f* + 1 ≠ 667.

Продолжать проверку для *n* > 7 не нужно, так как наименьшие *an* будут больше 667.

Итак, наименьшее значение *a*1, при котором *an* = 667, равно 2.

**Ответ.** а) 1, 10, 16, 20; б) нет; в) 2.

**Наименьшее и наибольшее значение дроби**

**8.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: $\frac{3a + 2c}{b + d}=\frac{12}{19}$?

б) Может ли дробь $\frac{3a + 2c}{b + d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a + 2c}{b + d}$, если
*a* > 3*b* и *c* > 2*d*? [2-12]

**Решение.** а) Приведём дробь к числителю 60: $\frac{12}{19}= \frac{60}{95}=\frac{3∙10 + 2∙15}{70+25}$. Ответ на вопрос: можно,если *a* = 10, *b* = 70, *c* = 15, *d* = 25.

б) Чтобы дробь $\frac{3a + 2c}{b + d}$ была в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$, должно выполняться равенство:

 $\frac{11(3a + 2c)}{b + d}$ = $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$,

которое преобразуется к виду

33*abd* + 22*bcd* = 3*abd* + 2*bcd* +3*ad*2 + 2*b*2*c*,

30*abd* + 20*bcd* – 3*ad*2 – 2*b*2*c* = 0,

3*ad*(10*b – d*) + 2*bc*(10*d* – *b*) = 0.

Так как 10*b – d* > 0 и 10*d* – *b* > 0, то левая часть последнего равенства положительна, следовательно, ни для каких двузначных попарно различных чисел *a*, *b*, *c* и *d* дробь $\frac{3a + 2c}{b + d}$ не может быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$.

в) Если *a* > 3*b* и *c* > 2*d*, то *a* ≥ 3*b* + 1 и *c* ≥ 2*d* + 1. Используя нестрогие неравенства, получим, что *A* = $\frac{3a + 2c}{b + d} \geq \frac{9b + 4d + 5}{b + d}=4+\frac{5b + 5}{b + d}$. Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, дробь $\frac{5b + 5}{b + d}$ должна быть возможно меньше, для этого число *d* в её знаменателе должно быть наибольшим. Так как *c* > 2*d*, то *d* = 49 (при *d* = 50 число *c* трёхзначное).

Итак, *A* $\geq 4+\frac{5b + 5}{b + d}= 4+\frac{5b +245 -240}{b + 49}=9-\frac{240}{b + 49}$. Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, дробь $\frac{240}{b + 49}$ должна быть возможно больше, для этого число *b* в её знаменателе должно быть наименьшим, т. е. *b* = 10.

Итак, *A* $\geq 9-\frac{240}{b + 49}=9-\frac{240}{59}=\frac{291}{59}$. Чтобы дробь *A* принимала наименьшее значение, онадолжна быть равна $\frac{291}{59}$. Это возможно, если

*b* = 10, *a* = 3*b* + 1 = 31, *d* = 49, *c* = 2*d* + 1 = 99.

**Ответ.** а) Может, например, при *a* = 10, *b* = 70, *c* = 15, *d* = 25; б) нет; в) $\frac{291}{59}$.

Изменим вопрос в задании в).

**9.** Известно, что *a*, *b*, *c* и *d* попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство: $\frac{a + c}{b + d}=\frac{3}{7}$?

б) Может ли дробь $\frac{a + c}{b + d}$ быть в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать дробь $\frac{a + c}{b + d}$, если
*a* < 5*b* и *c* < 6*d*? [\*]

**Решение.** а) Приведём дробь к числителю, который можно записать в виде суммы двузначных натуральных чисел: $\frac{3}{7}= \frac{21}{49}=\frac{10 + 11}{20 + 29}$. Ответ на вопрос: можно,если *a* = 10, *b* = 20, *c* = 11, *d* = 29.

б) Чтобы дробь $\frac{a + c}{b + d}$ была в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, должно выполняться равенство:

 $\frac{12(a + c)}{b + d}$ = $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$,

которое преобразуется к виду

12*abd* + 12*bcd* = *abd* + *bcd* + *ad*2 + *b*2*c*,

11*abd* + 11*bcd* – *ad*2 – *b*2*c* = 0,

*ad*(11*b – d*) + *bc*(11*d* – *b*) = 0.

Так как 11*b – d* > 0 и 11*d* – *b* > 0, то левая часть последнего равенства положительна, следовательно, ни для каких двузначных попарно различных чисел *a*, *b*, *c* и *d* дробь $\frac{a + c}{b + d}$ не может быть в 12 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

в) Если *a* < 5*b* и *c* < 6*d*, то *a* ≤ 5*b* – 1 и *c* ≤ 6*d* – 1. Используя нестрогие неравенства, получим, что *A* = $\frac{a + c}{b + d} \leq \frac{5b + 6d - 2}{b + d}=5+\frac{d- 2}{b + d}$. Чтобы дробь *A* принимала наибольшее значение, дробь $\frac{d- 2}{b + d}$ должна быть возможно больше, для этого число *b* в её знаменателе должно быть наименьшим:
*b* = 10.

Итак, *A* $\leq 5+\frac{d- 2}{b + d}= 5+\frac{d+10- 12}{d + 10}=6-\frac{12}{d+10}$. Чтобы дробь *A* принимала наибольшее значение, дробь $\frac{12}{d+10}$ должна быть возможно меньше, для этого число *d* в её знаменателе должно быть наибольшим:
*d* = 99.

Итак, *A* $\leq 6-\frac{12}{109}$ Чтобы дробь *A* принимала наибольшее значение, онадолжна быть равна$ \frac{642}{109}$. Это возможно, если

*b* = 10, *a* = 5*b* – 1 = 49, *d* = 99, *c* = 6*d* – 1 = 593.

**Ответ.** а) Может, например, при *a* = 10, *b* = 20, *c* = 11, *d* = 29; б) нет; в) $\frac{642}{109}$.

**Уравнение в целых числах**

**10.** Решите уравнение 3*n*+ 8 = *x*2 в целых числах. [2-11]

**Решение.** 1) Если *n* = 0, то уравнение имеет два решения:

*n* = 0, *x* = 3; *n* = 0, *x* = –3.

2) Перепишем уравнение в виде:

(3*n*+ 6) + 2 = *x*2.

Так как при любом целом *n* > 0 и любом целом *x* левая часть уравнения при делении на 3 даёт остаток 2, а правая часть – квадрат целого числа —даёт только два остатка – 0 и 1, то в этом случае уравнение не имеет решений в целых числах.

3) Перепишем уравнение в виде:

3*n*= *x*2 – 8.

Так как при любом целом *n* < 0 и любом целом *x* левая часть уравнения – число дробное, а правая часть – число целое, то и в этом случае уравнение (1) не имеет решений в целых числах.

**Ответ.** *n* = 0, *x* = 3; *n* = 0, *x* = –3.

**Треугольник с целочисленными сторонами**

**11.** Про три различных натуральные числа известно, что они являются длинами сторон некоторого тупоугольного треугольника.

а) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{13}{7}$?

б) Могло ли отношение большего из этих чисел к меньшему из них быть равно $\frac{8}{7}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, если известно, что среднее по величине из этих чисел равно 25? [2-25]

**Решение.** а) Пусть меньшая сторона треугольника равна 7, большая 13. Из теоремы косинусов следует, что для выполнения условия «больший угол треугольника тупой», достаточно выполнения неравенства

 $7^{2} + b^{2}-13^{2}$ < 0, (1)

где *b* – длина средней по величине стороны.

Так как при *b* = 8 треугольник существует и неравенство (1) верно, то это означает, что ответ на вопрос а): может.

б) Предположим, что такой треугольник существует. Пусть меньшая и большая стороны треугольника равны соответственно 7*x* и 8*x*, где *x –* натуральное число, *b* – длина средней по величине стороны.

Требуется выяснить, найдётся ли натуральное число *b*, такое, что выполняется неравенство

49$x^{2} + b^{2}-64x^{2}$ < 0. (2)

Из неравенства (2) следует, что $b^{2}<49x^{2}$, т. е. *b* < 7*x*,

а это противоречит условию задачи, что число 7*x* – наименьшее. Следовательно, отношение большего из чисел к меньшему из них не может быть равно $\frac{8}{7}$.

в) Пусть стороны треугольника имеют длины *a*, 25, *c* и верно неравенство *a* < 25 < *c*. Из неравенства (1) следует, что $c^{2}$ > $a^{2}$ + 625.

Начнём проверку с *a* = 24. В этом случае $c^{2}$ > 1201. Отношение $\frac{c}{a}$ будет наименьшим, если мы выберем наименьшее *c* = 35, удовлетворяющее этому неравенству: $\frac{c}{a}= \frac{35}{24}$.

Если *a* = 23, то $c^{2}$ > 1154, наименьшее *c* = 34, $\frac{c}{a}=\frac{34}{23}$ > $\frac{35}{24}$.

Дальнее уменьшение числа *a* приводит к увеличению дроби $\frac{c}{a}$, поэтому наименьшее значение, которое может принимать отношение большего из этих чисел к меньшему из них, равно $\frac{35}{24}.$

**Ответ.** а) Да; б) нет; в) $\frac{35}{24}$.

Среди приведённых задач много интересных, некоторые из них мне не удалось решить и понятно, и кратко, но надо определённо отметить, что эти задачи никак (или почти никак) не связаны с тем, чему мы учим в 10-11 классах. О задачах ЕГЭ, для решения которых не нужно учиться в 10-11 классах, которые используются для отбора в вузы с математическим профилем обучения и проверяют готовность к такому обучению, очень хотелось бы узнать мнение вузовских преподавателей.

Куда шли Пятачок и Винни-Пух совсем не являлось секретом даже для малышей, как не является секретом для нас направление движения математического образования России под флагом **так** проводимого ЕГЭ по математике: впереди нас ждёт катастрофа. Пессимисты считают, что она уже наступила.

**Литература**

**1.** В будущем году всем школьникам придется сдавать «единый» по математике. http://trv-science.ru/2008/10/29/v-budushhem-godu-vsem-shkolnikam-pridetsya-sdavat-edinyjj-po-matematike/

**2.** ЕГЭ-2017 : Математика. Профильный уровень. 50 вариантов типовых тестовых заданий / под. ред. И.В. Ященко. М.: Издательство «Экзамен», 2017. – 247 с.

1. Единое национальное тестирование «Математическая грамотность» – аналог российского ЕГЭ базового уровня. [↑](#footnote-ref-1)
2. Номера вариантов из сборника [2] указаны так: [2-9] – задача из варианта 9. [↑](#footnote-ref-2)
3. Из условия задачи удалены слова: «не обязательно различных» – они из следующей задачи. В возрастающей последовательности таких членов быть не может. Условия «возрастающая последова­тельность» и «состоит из не обязательно различных чисел» не совмещаются в одной задаче, как не совмещаются в жизни «несокрушимый столб» и «всесокрушающее пушечное ядро». [↑](#footnote-ref-3)